



ELSEVIER

International Journal of Thermal Sciences 41 (2002) 961–1016

International
Journal of
Thermal
Sciences

www.elsevier.com/locate/ijts

Revue bibliographique sur les écoulements de Poiseuille–Rayleigh–Bénard : écoulements de convection mixte en conduites rectangulaires horizontales chauffées par le bas

Bibliographical review on the Poiseuille–Rayleigh–Bénard flows: the mixed convection flows in horizontal rectangular ducts heated from below

Xavier Nicolas

Laboratoire d'étude des transferts d'énergie et de matière, Université de Marne la Vallée, bâtiment Lavoisier, 5, boulevard Descartes,
77462 Marne-la-Vallée cedex 2, France

Reçu le 27 juillet 2000; reçu en forme révisée le 5 novembre 2001

Résumé

Nous présentons une revue bibliographique exhaustive des écoulements de Poiseuille–Rayleigh–Bénard (PRB) : les écoulements de convection mixte en conduites rectangulaires horizontales chauffées uniformément par le bas. Cette revue couvre la période 1920–2001 et comporte 154 références. La gamme des paramètres concernés est : $0 < Pr \leq 1000$, $0 \leq Re \leq 1000$ et $0 \leq Ra \leq 10^6$. Les enjeux de ces écoulements dans le monde industriel sont présentés pour l'étude des dépôts de vapeurs chimiques (CVD) et pour le refroidissement des composants électroniques. Après avoir fait une synthèse des études de stabilité linéaire temporelle ou spatiale réalisées dans la zone d'entrée thermique et dans la zone thermoconvective pleinement développée, on s'intéresse aux analyses de stabilité spatio-temporelle, linéaires et faiblement non-linéaires, qui prennent en compte les notions d'instabilités convectives et absolues et qui sont plus appropriées pour traduire la dynamique des écoulements de PRB. Tous les résultats de stabilité sont systématiquement confrontés aux résultats expérimentaux et numériques. On fait une synthèse des formules de corrélation théoriques et expérimentales donnant les variations, en fonction de Ra , Re , Pr et $B = l/h$, du nombre de Nusselt, de la longueur d'établissement, de la longueur d'onde, de la fréquence et de la vitesse des rouleaux thermoconvectifs transversaux (R_{\perp}) et/ou longitudinaux ($R_{//}$). L'influence des conditions aux limites d'entrée et de sortie sur le développement spatial et temporel des R_{\perp} dans les simulations numériques et dans les expériences est aussi analysée. On fait la synthèse de la stabilité des structures thermoconvectives complexes (superposition de R_{\perp} et de $R_{//}$, structures périodiques et apériodiques, rouleaux sinuex et obliques) mises en évidence très récemment. On termine par un bilan des aspects encore mal connus ou mal compris des écoulements de PRB et on propose de nouvelles perspectives de recherche.

© 2002 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

Abstract

An exhaustive bibliographical review on the Poiseuille–Rayleigh–Bénard (PRB) flows, the mixed convection flows in horizontal rectangular ducts uniformly heated from below, is presented. This review covers the period 1920–2001 and counts 154 references. The concerned parameter range is $0 < Pr \leq 1000$, $0 \leq Re \leq 1000$ and $0 \leq Ra \leq 10^6$. The interest of these flows in the industrial world is presented for the chemical vapor deposition studies (CVD) and for the cooling of the electronic equipments. After having done a synthesis of the temporal or spatial linear stability studies in the thermal entrance zone and in the fully-developed thermoconvective zone, we consider the linear or weakly non-linear spatio-temporal stability analyses, which take into account the concepts of convective and absolute instabilities and which are more appropriate to represent the dynamics of the PRB flows. All the stability results are systematically compared with the experimental and numerical results. The theoretical or experimental correlation formulae giving the variations of the Nusselt number, of the wave length, of the frequency and of the velocity of the transversal (R_{\perp}) and/or longitudinal rolls ($R_{//}$), as a function of Re , Ra , Pr and $B = l/h$, are collected. The influence of the inlet and of the outlet boundary conditions on the space and time development of the R_{\perp} in the experiments and in the numerical simulations is also analysed. A synthesis of the very recently discovered complex thermoconvective

patterns (superposition of R_{\perp} and R_{\parallel} , periodic and aperiodic patterns, wavy or oblique rolls) is presented. To end, the badly known or badly understood aspects of the PRB flows are summed up and subjects for future investigations are proposed.

© 2002 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

Mots-clés : Poiseuille–Rayleigh–Bénard ; Conduites rectangulaires ; Convection mixte ; Instabilités thermoconvectives ; Instabilités convective et absolue ; Entrée thermique ; Longueur d'établissement ; Transferts thermiques ; Conditions aux limites ; CVD ; Refroidissement électronique

Keywords: Poiseuille–Rayleigh–Bénard; Rectangular duct; Mixed convection; Thermoconvective instabilities; Convective and absolute instabilities; Thermal entrance; Growth length; Heat transfer; Boundary conditions; CVD; Electronic cooling

1. Introduction

1.1. Présentation générale des écoulements de Poiseuille–Rayleigh–Bénard

Les écoulements de Poiseuille–Bénard ou de Poiseuille–Rayleigh–Bénard (PRB) sont des écoulements laminaires de convection mixte en conduite rectangulaire horizontale chauffée uniformément par le bas et refroidie uniformément par le haut. Ils résultent de la superposition de deux sources convectives : un gradient de pression horizontal entraîne le fluide dans la conduite et un gradient de température vertical est à l'origine de la formation de structures thermoconvectives. Lorsque le fluide est isotherme ou que le transfert de chaleur au sein du fluide est purement conductif, c'est à dire lorsque le nombre de Rayleigh (Ra) est inférieur à une valeur critique Ra^* , on a affaire à un écoulement de Poiseuille (cf. Fig. 1). Lorsque le nombre de Rayleigh est suffisamment élevé ($Ra > Ra^*$), plusieurs types d'écoulements thermoconvectifs peuvent apparaître : si le nombre de Reynolds (Re) est nul, on a affaire à un écoulement de Rayleigh–Bénard ; si Re est non nul et inférieur à une valeur critique Re^* , il apparaît des rouleaux thermoconvectifs d'axes transversaux à l'axe de la conduite et formant une chaîne de cylindres contrarotatifs emportés par l'écoulement moyen. Une représentation schématique de ces rouleaux, ainsi que des photos obtenues en faisant des plans de lumière dans des écoulements d'air avec de la fumée sont présentées Fig. 2. Ces structures sont

quasi bidimensionnelles : la composante transversale de la vitesse est nulle, excepté près des bords latéraux. Dorénavant, dans tout ce document, on appellera cette configuration thermoconvective les «rouleaux transversaux» et on les notera R_{\perp} . L'autre configuration qui peut apparaître quand $Ra > Ra^*$ et $Re > Re^*$ est constituée de rouleaux thermoconvectifs hélicoïdaux, contrarotatifs, stationnaires et d'axes parallèles à celui de la conduite. Ils sont présentés Fig. 3. Ici, les trois composantes de vitesse sont non nulles. Dans toute la suite, on appellera cette configuration les «rouleaux longitudinaux» et on les notera R_{\parallel} . On gardera en mémoire qu'il ne sera question dans cet exposé que de problèmes de convection mixte à faibles nombres de Reynolds, où l'instabilité est d'origine thermique. Nous ne traiterons pas des écoulements à grands nombres de Reynolds ($Re > 7000$) pour lesquels les instabilités d'origine visqueuse donnent naissance à des ondes de Tollmien–Schlichting.

De nombreuses études ont analysé la stabilité linéaire temporelle de l'écoulement de base présenté à la Fig. 1 vis à vis des R_{\perp} et des R_{\parallel} . Dans le cas d'un écoulement entre deux plaques infinies (cf. Fig. 4), c'est à dire dans le cas où l'allongement transversal $B = l/h \rightarrow \infty$, ces études montrent que les R_{\parallel} sont toujours plus instables que les R_{\perp} : le nombre de Rayleigh critique Ra_{\parallel}^* pour l'apparition des R_{\parallel} est toujours inférieur à Ra_{\perp}^* , le nombre de Rayleigh critique pour l'apparition des R_{\perp} . À nombre de Reynolds nul, pour la convection naturelle, il n'y a pas de direction privilégiée dans l'écoulement. On ne peut pas différencier les R_{\parallel} des R_{\perp} . Le nombre de Rayleigh critique est donc 1708 dans les deux cas. Par contre, pour $Re \neq 0$, Ra_{\parallel}^* est indépendant de Re alors que Ra_{\perp}^* est une fonction croissante de Re .

Dans le cas des conduites d'extension latérale finie (cf. Fig. 5), le confinement a deux effets. Il stabilise l'écoulement de base puisque, quand B décroît, $Ra^* = \min(Ra_{\perp}^*, Ra_{\parallel}^*)$ croît. De plus, lorsque le nombre de Reynolds est inférieur à la valeur critique Re^* , les parois verticales favorisent l'apparition des R_{\perp} . Par contre, quand $Re > Re^*$, l'écoulement moyen favorise les R_{\parallel} . On notera que, non seulement, Ra_{\perp}^* est une fonction de Re et de B , mais qu'il est aussi fonction du nombre de Prandtl Pr : quand Pr croît, Ra_{\perp}^* croît (cf. Fig. 5). Or, comme Ra_{\parallel}^* ne varie pas quand Pr varie, Re^* diminue si Pr augmente. Re^* est donc une fonction de Pr et de B .

La description des écoulements de PRB qui vient d'être faite est issue d'analyses de stabilité linéaire temporelle datant du début des années 80. Cette description est qualitative-

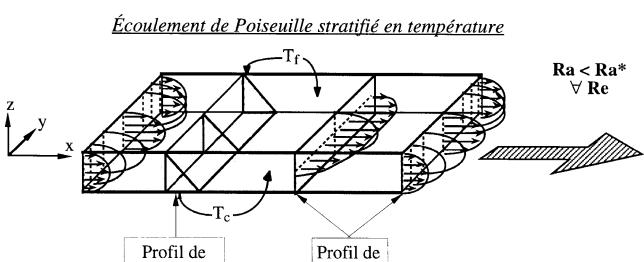


Fig. 1. Écoulement de Poiseuille purement conductif : écoulement de base dans les études de stabilité linéaire temporelle.

Fig. 1. Purely conductive Poiseuille flow: basic flow of the temporal linear stability studies.

Nomenclature

A	longitudinal aspect ratio of the channel = L/h
$A(x, t)$	temporal and spatial modulation of the amplitude of the perturbations whose variations are given by the amplitude equation theory
B	transversal aspect ratio of the channel = l/h
c_0, c_1, c_2	coefficients of the Ginzburg–Landau equation
c_x, c_y	streamwise and spanwise spatial amplification coefficients of the perturbations ($c_x, c_y \in \mathbb{R}$)
D_h	hydraulic diameter m
f	frequency of the R_\perp s ⁻¹
f	scalar or vectorial variable replacing a set of variables verifying the same mathematical relation
g	gravitational acceleration m·s ⁻²
h	channel height m
i	horizontal unit vector pointing to the average flow direction
j	horizontal unit vector = $k \wedge i$
k	upward vertical unit vector
k_x, k_y	streamwise and spanwise dimensionless wave numbers of the perturbations ($k_x, k_y \in \mathbb{R}$)
l	channel width m
l_e	dimensionless characteristic growth length of the R_\perp defined by $W_{\max}(l_e) = W_s/2$
L	channel length m
L_e	reduced characteristic growth length of the R_\perp , $= \sqrt{\mu} l_e / \xi_0$
p	thermodynamic pressure
P	$= p + \rho g z$
q	heat flux W·m ⁻²
$R_{//}$	longitudinal rolls
R_\perp	transversal rolls
$R_{\perp//}$	superposition of the R_\perp and of the $R_{//}$
r_T	reduced temperature = $(T_c - T_f)/T_f$
t	dimensionless time
T	dimensionless fluid temperature
T_c, T_f	temperatures of the bottom hot wall and of the top cold wall, respectively K
ΔT	temperature difference between the hot and cold walls = $T_c - T_f$ K
U, V, W	streamwise (x), spanwise (y) and vertical (z) velocity component
U°	average velocity of the flow m·s ⁻¹
V	dimensionless velocity vector, (U, V, W) or dimensional m·s ⁻¹
v_g	group velocity in the Ginzburg–Landau equation = $(\partial \sigma_i / \partial k_x)^*$
V_g	reduced group velocity = $v_g \tau_0 / (\mu \xi_0^2 (1 + c_1^2))^{1/2}$
V_r	velocity of the R_\perp
W_{\max}	stationary envelope of the maximum vertical velocity component along the channel axis (function of x) m·s ⁻¹
W_s	saturation amplitude of W : value of $W_{\max}(x)$ for $x \in [x_e, x_s]$ m·s ⁻¹
x_e, x_s	axial coordinates indicating the end of the entrance zone and the beginning of the zone perturbed by the outlet boundary conditions, respectively
x, y, z	axial, spanwise and vertical coordinates (dimensionless in general)
<i>Dimensionless parameters</i>	
Nu	according to the context, local or space and/or time average Nusselt number computed on the horizontal walls of the channel
Gr	Grashof number = $Ra/Pr = g\beta(T_c - T_f)h^3/v^2$
Pe	Peclet number = $Re Pr = U^\circ h/\alpha$
Pr	Prandtl number = v/α
Ra	Rayleigh number = $g\beta(T_c - T_f)h^3/(v\alpha)$
Ra'	modified Rayleigh number based on the heat flux q through the heated wall = $g\beta q h^4/(\kappa v \alpha)$
Ra^*	$\min(Ra_\perp^*, Ra_{//}^*)$
Ra_0^*	critical Rayleigh number at $Re = 0$; $Ra_0^* = 1708$ when $A \rightarrow \infty$ and $B \rightarrow \infty$
Ra_\perp^*	critical Rayleigh number determined from the temporal linear stability analysis of the Poiseuille flow vis-à-vis the convectively unstable R_\perp (Ra_\perp^* increases with Re)
$Ra_{//}^*$	like Ra_\perp^* but for the $R_{//}$ ($Ra_{//}^*$ is independent of Re)
$Ra_{//}^{II}$	critical Rayleigh number determined from the temporal linear stability analysis of the stationary $R_{//}$ flows vis-à-vis the oscillating or wavy $R_{//}$ flows
Ra_\perp^{conv}	critical Rayleigh number determined from the spatio-temporal linear stability analysis between the convectively and absolutely unstable zones for the R_\perp
$Ra_{//}^{\text{conv}}$	like Ra_\perp^{conv} but for the $R_{//}$
Re	Reynolds number = $U^\circ h/v$
Re'	Reynolds number = $U^{\max} h/v$
Re^*	critical Reynolds number, determined from the temporal linear stability analysis, corresponding to the transition between Poiseuille flow, R_\perp and $R_{//}$ (for $Ra = Ra_\perp^* = Ra_{//}^*$)
$Re_{\perp-//}^*$	critical Reynolds number, determined experimentaly or by numerical simulations, corresponding to the transition between the R_\perp and the $R_{//}$ in the non-linear domain (for $Ra > Ra_\perp^*$ and $Ra > Ra_{//}^*$)
Re^{**}	critical Reynolds number corresponding to the threshold of the R_\perp pinning observed for very slow flows: it indicates the transition between the stationary R_\perp and the moving R_\perp

<i>Greek letters</i>		
α	thermal diffusivity	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
β	thermal expansion coefficient	K^{-1}
γ	coefficient of the Ginzburg–Landau equation	
ε	$=(Ra - 1708)/1708$, relative distance to the critical Rayleigh number $Ra_0^* = 1708$	
ε_{\perp}^*	$=(Ra_{\perp}^* - 1708)/1708$	
$\varepsilon_{\parallel}^*$	$=(Ra_{\parallel}^* - 1708)/1708$	
$\varepsilon_{\perp}^{\text{conv}}$	$=(Ra_{\perp}^{\text{conv}} - 1708)/1708$	
$\varepsilon_{\parallel}^{\text{conv}}$	$=(Ra_{\parallel}^{\text{conv}} - 1708)/1708$	
κ	thermal conductivity	$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
λ	dimensionless wave length of the R_{\perp} (h is the reference length)	
μ	$=(Ra - Ra_{\perp}^*)/Ra_{\perp}^*$, relative distance to the critical Rayleigh number Ra_{\perp}^* (Re)	
ν	kinematic viscosity	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
ξ_0^2	coefficient of the Ginzburg–Landau equation	
ρ	mass per unit volume	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
σ	dimensionless complex time amplification coefficient of the perturbations, $\sigma_r + i\sigma_i$	
σ_i	dimensionless time pulsation of the perturbations	
τ_0	coefficient of the Ginzburg–Landau equation	
ψ	stream function, given by $U = -\partial\psi/\partial z$ and $W = \partial\psi/\partial x$	
Ω	vorticity $= \partial U/\partial z - \partial W/\partial x = -\nabla^2\psi$	
<i>Abbreviations and symbols</i>		
CVD	Chemical Vapor Deposition	
IBC	Inlet Boundary Condition	
LDA	Laser Doppler Anemometry	
OBC	Open or Outlet Boundary Condition	
PBC	Periodic Boundary Condition	
PRB	Poiseuille–Rayleigh–Bénard	
∇	nabla operator, vector $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ in cartesian coordinates	
<i>Superscripts</i>		
\circ	reference state or average value	
conv	indicates parameters or variables at the transition between the convectively and absolutely unstable zones	
max, min	indicate a maximum and a minimum, respectively	
*	indicates parameters or variables at the transition between the linearly stable and convectively unstable zones. In a general way, indicates a critical value	
$-$	basic state for the linear stability study	
$'$	infinitesimal perturbation	
\sim	perturbation amplitudes when they are written in the normal mode form	
<i>Subscripts</i>		
i, r	imaginary part and real part of a complex number	
\perp, \parallel	indicate variables corresponding to the R_{\perp} and to the R_{\parallel} , respectively	

ment correcte mais elle est très simplifiée. Nous verrons que les analyses de stabilité linéaire spatio-temporelle (datant du début des années 90), qui font intervenir les notions d'instabilités convective et absolue, sont plus appropriées pour ce type d'écoulement. D'autre part, des études récentes, expérimentales, théoriques et numériques, menées dans des domaines non-linéaires, ont mis en évidence d'autres structures thermoconvectives, tridimensionnelles, instationnaires et de formes plus complexes que les R_{\perp} et les R_{\parallel} . L'objectif principal de cet article est de faire une synthèse de ces études de stabilité et de la dynamique connue de ces structures complexes.

1.2. Objectifs de l'étude et plan de l'exposé

Kelly (1977, 1994) [1,2] a proposé une étude bibliographique des travaux qui, jusqu'en 1993, ont étudié la naissance, le développement et la stabilité de la convection thermique dans des écoulements cisaillés. Il présente les concepts de base et les résultats principaux, mais son propos n'est pas de faire une revue exhaustive. L'analyse porte à la fois sur les écoulements dans des canaux horizontaux ou inclinés, droits ou courbés, chauffés uniformément ou non, dont l'écoulement de base peut avoir un profil de Poiseuille

ou de Couette. Les écoulements de PRB sont donc un cas particulier dans cette étude. En ce qui les concerne, Kelly présente les études de stabilité linéaire, convective et absolue, de l'écoulement de base vis à vis des R_{\perp} et des R_{\parallel} , en donnant la formulation mathématique des différents problèmes de stabilité. Les travaux expérimentaux qui étaient les résultats de stabilité sont cités, mais très peu de données quantitatives relatives à la description ou à la stabilité des différentes structures thermoconvectives sont fournies. L'objectif de cet article est de compléter la revue de Kelly (1977, 1994) [1,2] (nous analysons plus de 90 nouvelles références sur le sujet, dont 50 postérieures à 1993) afin de fournir une revue bibliographique aussi exhaustive que possible et une synthèse des données qualitatives et quantitatives décrivant les écoulements de PRB.

Le plan de l'exposé comprend, en plus de cette introduction (Section 1), sept grandes parties (Sections 2 à 8) et une annexe. Dans la Section 2, nous présentons les applications industrielles dont les enjeux nécessitent une connaissance approfondie de la structure et de la stabilité des écoulements de PRB. En l'occurrence, il s'agit des études sur les dépôts de vapeurs chimiques (chemical vapor deposition ou CVD en anglais) ou sur le refroidissement des composants électroniques. Aux Sections 3 et 4, nous présentons rapidement

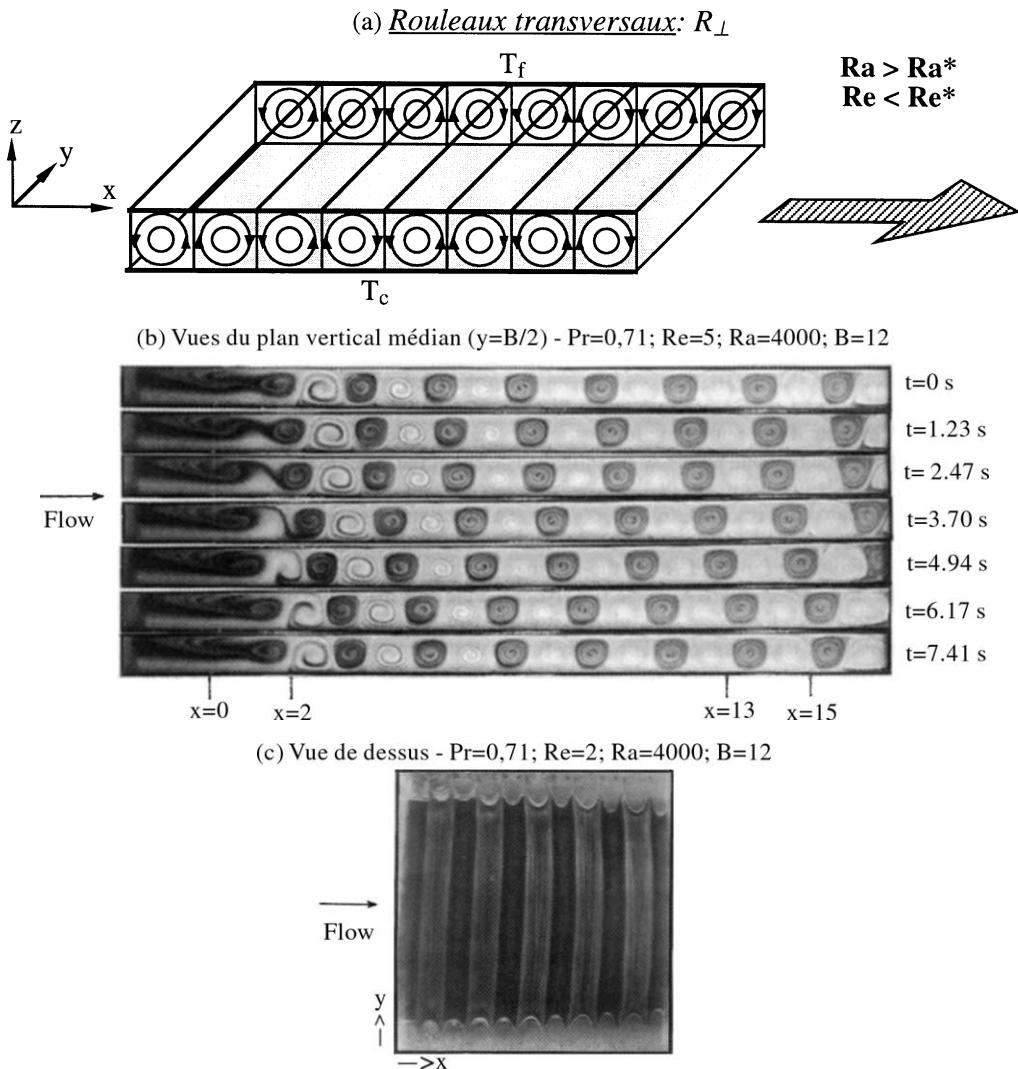


Fig. 2. Écoulements de rouleaux transversaux : (a) Représentation schématique (la zone d'établissement et l'effet des bords verticaux sur la forme des rouleaux ne sont pas représentés) ; (b) Défilement de R_{\perp} dans l'air visualisés par une série de 7 photographies ; début de la zone chauffée en $x = 0$; pour $x \leq 2$, entrée thermique et zone d'établissement des R_{\perp} ; pour $x > 2$, écoulement de R_{\perp} pleinement développés ; (c) 11 R_{\perp} vus de dessus ((b) et (c) sont tirés de Yu et al. (1997) [128]).

Fig. 2. Transversal roll flows: (a) Schematic representation (the entrance zone and the lateral wall effect on the shape of the rolls are not shown); (b) Series of 7 photos showing the scrolling of the R_{\perp} in an air flow; start of the heating zone at $x = 0$; for $x \leq 2$, thermal entrance and zone of the establishment of the R_{\perp} ; for $x > 2$, fully developed R_{\perp} ; (c) top view of 11 R_{\perp} ((b) and (c) are extracted from Yu et al. (1997) [128]).

les résultats des travaux sur les écoulements de PRB réalisés avant le début des années 80. À la Section 3, nous rappelons les expériences de visualisation d'avant 1940, qui ont permis d'avoir une compréhension qualitative du comportement des R_{\perp} et des $R_{//}$, et dont Sir David Brunt [3] a rédigé une synthèse en 1951. À la Section 4, nous rappelons les principaux résultats des analyses de stabilité linéaire, temporelle ou spatiale, des écoulements de PRB dans la zone d'entrée thermique et dans la zone pleinement développée. Nous rappelons également les expériences qui ont permis de vérifier les résultats de ces modèles théoriques. La Section 5 est consacrée aux notions fondamentales d'instabilités convectives et absolues dans le cas des R_{\perp} et des $R_{//}$. Nous présentons les analyses de stabilité spatiale et tempo-

relle qui, ces dix dernières années, ont permis d'avoir une compréhension plus juste de la dynamique linéaire et faiblement non-linéaire de ces structures thermoconvectives. À la Section 6, nous nous intéressons au comportement global des écoulements de PRB : nous faisons une synthèse des résultats obtenus sur la variation des nombres de Nusselt pariétaux dans la zone d'entrée thermique et dans la zone thermoconvective pleinement développée, ainsi que sur la variation des longueurs d'établissement des R_{\perp} et des $R_{//}$ en fonction de Ra et de Re . La Section 7 est consacrée à l'analyse fine des R_{\perp} : analyse de leur structure spatiale (longueur d'onde) et de leur comportement temporel (fréquence et vitesse de déplacement). Nous nous intéressons en particulier à l'influence des conditions aux limites d'entrée et de sortie sur

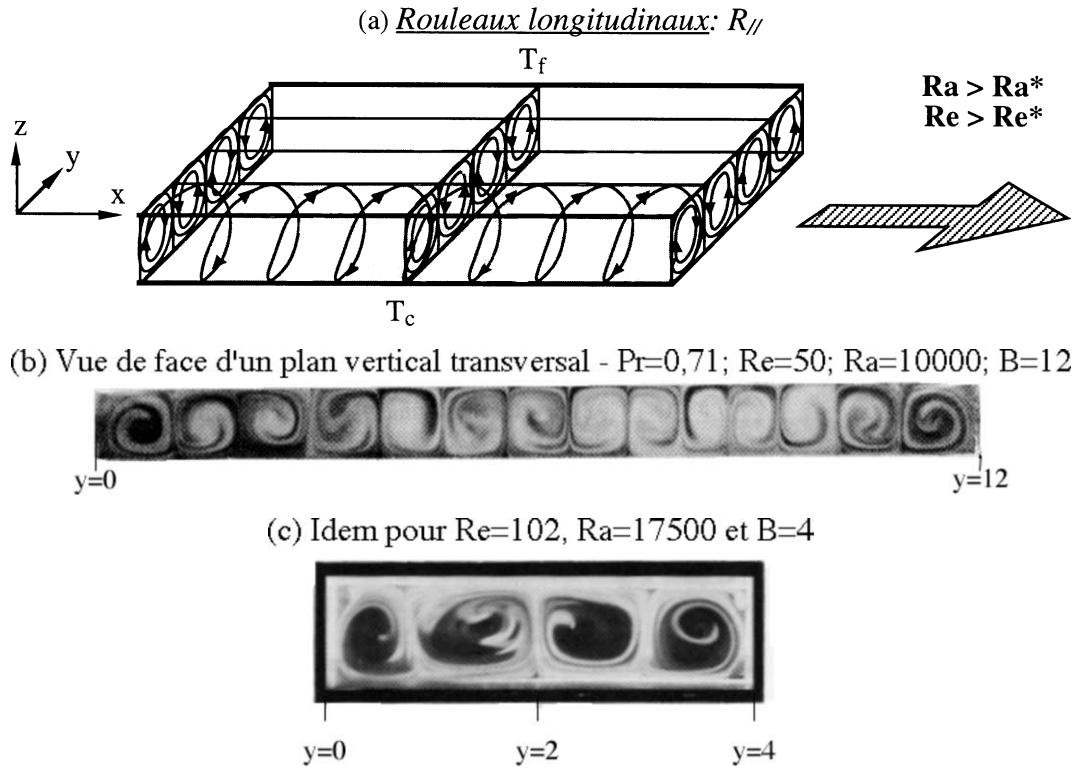


Fig. 3. Écoulements de rouleaux longitudinaux pleinement établis : (a) Représentation schématique (l'effet des bords verticaux sur la forme des rouleaux n'est pas représenté) ; (b) Cas de $14 R_{\parallel}$ dans un écoulement d'air pour $B = l/h = 12$ (tiré de Yu et al. (1997) [73]) ; (c) Cas de $4 R_{\parallel}$ pour $B = l/h = 4$ (tiré de Lin et al. (1996) [125]).

Fig. 3. Fully established longitudinal roll flows: (a) Schematic representation (the lateral wall effect on the shape of the rolls is not shown); (b) Case of $14 R_{\parallel}$ in an air flow for $B = l/h = 12$ (extracted from Yu et al. (1997) [73]); (c) Case of $4 R_{\parallel}$ for $B = l/h = 4$ (extracted from Lin et al. (1996) [125]).

Conduite d'extension latérale infinie ($B=l/h=\infty$)

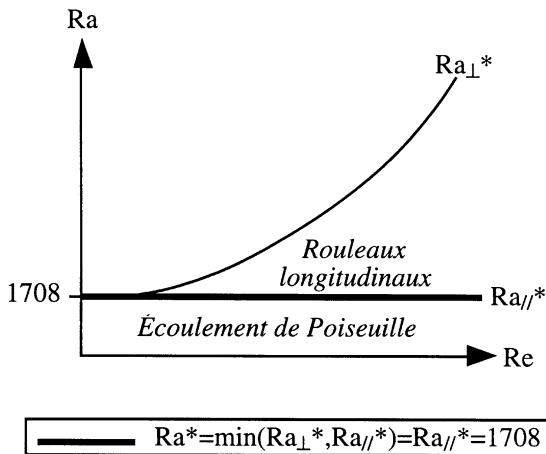


Fig. 4. Diagramme de stabilité linéaire temporelle de l'écoulement de PRB entre deux plaques horizontales infinies.

Fig. 4. Temporal linear stability diagram of the PRB flow between two infinite horizontal walls.

les R_{\perp} dans les simulations numériques directes et dans les expériences. Dans la dernière partie (Section 8), nous analysons les études très récentes, expérimentales, numériques et théoriques, qui ont mis en évidence des structures thermo-

Conduite d'extension latérale finie

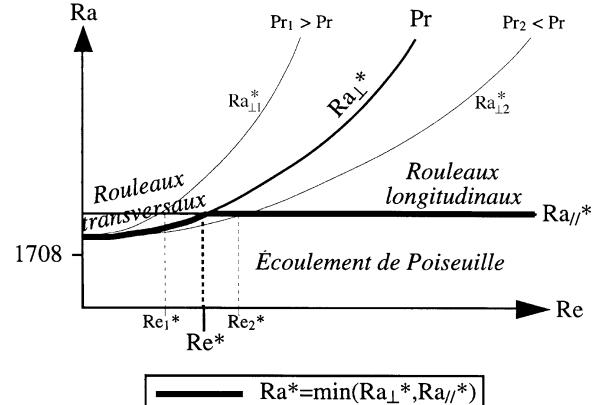


Fig. 5. Diagramme de stabilité linéaire temporelle de l'écoulement de PRB pour une conduite d'extension latérale finie (extrait de Nicolas et al. (2000) [53] d'après un graphe de Luijckx et al. (1981) [66]).

Fig. 5. Temporal linear stability diagram of the PRB flow for a finite lateral extension duct (extracted from Nicolas et al. (2000) [53] adapted from a graph of Luijckx et al. (1981) [66]).

convectives complexes dans les écoulements de PRB : superposition de R_{\perp} et de R_{\parallel} , structures intermittentes périodiques ou apériodiques, rouleaux sinuieux ou obliques, etc. Malgré la grande disparité des résultats obtenus, nous es-

sayons de faire une synthèse de la stabilité de ces différentes structures. En guise de conclusion (Section 9), nous faisons un bilan des aspects encore mal connus ou mal compris dans les écoulements de PRB et nous proposons des pistes pour de nouvelles perspectives de recherche. L'Annexe A présente la formulation mathématique des analyses de stabilité linéaire temporelle de l'écoulement de Poiseuille purement conductif pour des écoulements de PRB entre deux plaques infinies et dans des conduites d'extension latérale finie.

Dans la suite, on retiendra que les dates proposées pour chacune des parties sont des repères approximatifs visant à situer à peu près les périodes concernées.

2. Les simulations numériques directes dans les applications industrielles (1983–2001)

Ces vingt dernières années, de nombreux travaux motivés par une application industrielle se sont intéressés à la configuration des écoulements de PRB. Ces applications concernent soit l'étude des dépôts de vapeurs chimiques (Chemical Vapor Deposition : CVD) (Section 2.1), soit le refroidissement des composants électroniques dans les circuits imprimés (Section 2.2). Notre objectif n'est pas de faire ici une revue exhaustive de ces travaux qui, bien souvent, par leur complexité, nous éloigneraient trop de la configuration académique initiale. Nous nous concentrerons sur les modélisations numériques simplifiées de ces problèmes qui nous permettront de mettre en exergue les enjeux industriels et les principaux résultats pratiques trouvés, ainsi que les méthodologies numériques utilisées en ce qui concerne la CVD. Les résultats détaillés concernant par exemple les transferts thermiques, les longueurs d'établissement des régimes convectifs ou la stabilité des différentes structures thermoconvectives seront analysés dans les parties suivantes (Sections 5 à 8). En ce qui concerne la CVD, pour avoir une revue complète, on se référera à Jensen et al. (1991) [4] et Ingle et Mountziaris (1994) [5].

2.1. L'étude des dépôts de vapeurs chimiques (la CVD)

2.1.1. Présentation générale de la CVD

La CVD est un procédé utilisé pour la fabrication de films minces de matière inorganique. Dans un réacteur, on fait circuler un mélange de gaz inertes et réactifs qui, par pyrolyse au contact d'un substrat chauffé, va créer une fine couche de dépôts solides. Ce procédé intervient par exemple lors de la fabrication des circuits microélectroniques pour obtenir des couches minces de semi-conducteurs, ou lors de la conception de supports d'enregistrements magnétiques ou optiques. L'enjeu dans cette technologie est de pouvoir contrôler le taux de dépôt des vapeurs chimiques (c'est à dire la variation de l'épaisseur du dépôt par unité de temps qui s'exprime en général en $\text{\AA}\cdot\text{min}^{-1}$), de manière à obtenir les couches les plus uniformes possibles à l'épaisseur souhaitée.

La géométrie du réacteur peut varier mais la plus répandue est une conduite horizontale de section rectangulaire, où

le substrat chauffé est placé sur la paroi du bas (cf. Jensen et al. (1991) [4]). On retrouve donc exactement la configuration de l'écoulement de PRB. Evans et Greif (1989, 1991) [6,7] donnent l'ordre de grandeur des dimensions des réacteurs et des paramètres des écoulements rencontrés typiquement en CVD (voir aussi le Tableau 1) : $L \sim 100 \text{ cm}$, $l \sim 10 \text{ cm}$, h de l'ordre de quelques centimètres, la température du substrat $T_c \sim 1000$ à 1300 K , $Ra \sim 700$ à 50000 , $Re \sim 1$ à 100 et $Pr \sim 0,7$. Pour éviter la formation de dépôt sur les parois latérales et supérieure, celles-ci sont refroidies avec de l'eau ($T_f \sim 300 \text{ K}$). Vu les gradients de température mis en jeu, les écoulements dans les réacteurs CVD sont donc des écoulements thermoconvectifs. L'étude de leur structure est un point très important car elle va conditionner la forme et donc la qualité des dépôts.

2.1.2. Quelles structures thermoconvectives privilégier en CVD ?

Les études de Moffat et Jensen (1986, 1988) [8,9], Ouazzani et Rosenberger (1990) [10] et Kleijn et Hoogendoorn (1991) [11] montrent que les dépôts de vapeurs chimiques (Gallium Arsenide ou Silicone) ne sont pas uniformes, ni axialement, ni transversalement, lorsque la structure de l'écoulement prend la forme de $R_{//}$ dans des réacteurs de section rectangulaire constante. Les dépôts sont toujours plus importants à l'entrée que vers l'aval et ils prennent la forme de stries parallèles à la l'axe du canal. Pour remédier à la non-uniformité axiale, nombreux sont ceux qui proposent d'incliner légèrement le substrat chauffé (l'angle d'inclinaison variant de 2 à 10 degrés en général) de façon à créer un canal convergent et, par conséquent, provoquer une accélération de l'écoulement et une augmentation des transferts de chaleur et de masse dans la direction axiale (cf. Ouazzani et Rosenberger (1991) [10], Karki et al. (1993) [12], Park et Pak (1993) [13] et Chiu et al. (2000) [14]). D'autres, comme Hosokawa et al. (1993) [15], proposent de jouer sur le gradient de température horizontal. Cependant, comme le montrent Park et Pak (2000) [13], la non-uniformité transversale du dépôt persiste, d'autant plus que Re est petit. Evans et Greif (1989, 1991) [6,7] proposent d'opérer à très petits nombres de Reynolds, de façon à faire apparaître des R_{\perp} dans les réacteurs. En effet, le déplacement de ces rouleaux dans le sens de l'écoulement moyen permet d'obtenir des couches plus uniformes transversalement qu'avec les $R_{//}$.

Visser et al. (1989) [16] montrent expérimentalement et numériquement que lorsqu'un écoulement circulant sur une plaque froide arrive brusquement sur une zone chauffée, il est possible qu'il y ait formation d'une cellule transversale stationnaire située au-dessus de la zone de transition de température (cf. Fig. 6). Cette cellule n'a rien à voir avec les R_{\perp} contrarotatifs emportés par l'écoulement moyen de la Fig. 2. C'est une cellule unique qui résulte du fort gradient négatif de pression causé par la variation brutale de la température : l'écoulement accélère près de la plaque inférieure et si Ra est suffisamment grand, un R_{\perp} unique et fixe se maintient sur l'entrée thermique (il est noté « R_{\perp} »

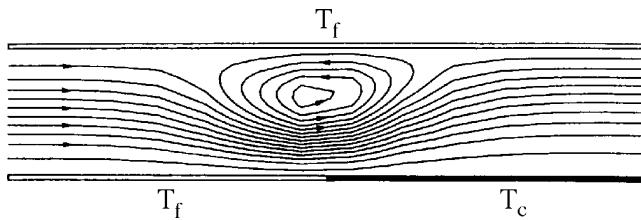


Fig. 6. Simulation numérique 2D de la cellule transversale stationnaire située juste au-dessus de l'entrée sur la plaque chauffée à $Re = 2,1$, $Ra = 770$ et $Pr = 0,7$ (tiré de Visser et al. (1989) [16]).

Fig. 6. 2D numerical simulation of the steady transversal roll located just above the beginning of the heated wall at $Re = 2.1$, $Ra = 770$ and $Pr = 0.7$ (extracted from Visser et al. (1989) [16]).

fixe » dans le Tableau 1). Pour une meilleure compréhension de ce phénomène, on peut se référer à l'explication théorique et numérique de Makhviladze et Martjushenko (1998) [17]. La présence de cet écoulement de retour est à bannir de l'entrée des réacteurs chimiques car elle est à l'origine d'un taux de dépôt très élevé à l'entrée et plus faible vers l'aval (cf. Kleijn et Hoogendoorn (1991) [11]). De plus, comme lorsqu'on fabrique des composants électroniques ayant plusieurs couches successives de différents semi-conducteurs, on désire que l'interface entre chaque couche de dépôt soit bien nette, les structures transversales (R_{\perp} et R_{\perp} fixe) doivent être éliminées du processus de fabrication. Sinon, lorsqu'on fait circuler les uns à la suite des autres des

Tableau 1

Présentation synthétique des études numériques sur la CVD pour des configurations proches de celles des écoulements de PRB : modèles mathématiques, paramètres de l'écoulement (calculés à partir des conditions d'entrée), paramètres géométriques et structures thermoconvectives observées

Table 1

Synthetic presentation of the numerical studies about CVD for configurations close to those of the PRB flows: mathematical models, flow parameters (computed from the entrance conditions), geometrical parameters and observed thermoconvective structures

Références	Code 2D ou 3D, Elliptique ou Parabolique, Stationnaire ou Instationnaire	Equation de conservation des espèces	Hypothèse de Boussinesq ($r_T = \frac{T_c - T_f}{T_f}$)	Gaz porteurs + gaz réactif et/ou Pr	Re	Ra	$B = l/h$ en 3D	Plans Parallèles et/ou Substrat Incliné	Structures convectives observées
Moffat et Jensen (1986) [8]	3D-P-S	oui	non (2,33)	$H_2 + AsH_3 + TMGa$	~15	<5000	1,3 ; 2 ; 2,8	PP	$R_{//}$
Moffat et Jensen (1988) [9]	3D-P-S	oui	non (2,33 ; 3,4)	$H_2 + SiH_2$	~30	<5000	2 ; 4 ; 4,9	PP SI	$R_{//}$
Evans et Greif (1989) [6]	2D-E-I	non	non (0,33 ; 2,33)	2/3	0,1–100	1666– 40000	PP	R_{\perp}	
Visser et al. (1989) [16]	2D-E-S	non	non (0,5–2,5)	0,7	0,1–10	7–7000	PP	R_{\perp} fixe	
Ouazzani et Rosenberger (1990) [10]	2D-E-S 3D-E-S 3D-P-S	oui	non (2,24)	(H_2 ou N_2) + $AsH_3 + TMGa$	2,6–50	15–700	2,4 ; 2,8 ; 6,3	PP SI	R_{\perp} fixe ; $R_{//}$
Evans et Greif (1991) [7]	3D-E-I	non	non (0,01)	2/3	5 ; 10	3333	2	PP	$R_{\perp} ; R_{//}$
Kleijn et Hoogendoorn (1991) [11]	2D-E-S 3D-E-S	oui	non (1,43–2,24)	(H_2 ou N_2) + $AsH_3 + TMGa$	1–20	30–12000	1,3 ; 2,8 ; 3,8 ; 6,3	PP SI	R_{\perp} fixe ; $R_{//}$
Evans et Greif (1993) [21]	3D-E-I	non	non (0,01 ; 2,33)	2/3	75–250	83333	2	PP	$R_{//} ; R_{\perp-//}$
Hosokawa et al. (1993) [15]	3D-E-I	oui	oui	0,71	67,5 ; 165	7000– $1,4 \times 10^6$	2	PP	$R_{//}$; régime quasi-périodique et chaotique
Karki et al. (1993) [12]	3D-E-S	non	oui	0,7	10–50	7000 ; 70000	2 à 4,2	SI	R_{\perp} fixe ; $R_{//}$
Ingle et Mountzaris (1994) [5]	2D-E-S	non	non (0,067–3,33)	H_2 ou N_2 ~0,7	$10^{-3} – 100$	$1 – 7 \times 10^5$	PP	R_{\perp} fixe sur entrée et sortie	
Spall (1996) [18,19]	3D-E-I	non	non (2,33)	0,7	5–25	130700	4	PP	R_{\perp} fixe ; $R_{//}$; $R_{//}$ sinueux périodiques ; régime apériodique
Makhviladze et Martjushenko (1998) [17]	2D-E-S 3D-E-S	non	non (0,01 ; 0,1 ; 1)	~0,7	0,1–10	20–4500	2 ; 5	PP	R_{\perp} fixe
Park et Pak (2000) [13]	3D-E-S	oui	non (2,33)	$H_2 + AsH_3 + TMGa$ 0,7	25–100	70000	4	SI PP	R_{\perp} fixe ; $R_{//}$

gaz réactifs de différentes natures, ils peuvent se mélanger et détruire la qualité de l'interface entre chaque couche de semi-conducteur. Ingle et Mountzaris (1994) [5], en accord avec les expériences de Visser et al. (1989) [16], montrent que le R_{\perp} fixe sur l'entrée n'apparaît pas si $Gr/Re < 100$ pour $10^{-3} < Re \leq 4$ et si $Gr/Re^2 < 25$ pour $4 \leq Re < 100$.

On pourra se référer à Chiu et al. (2000) [14] pour avoir des visualisations expérimentales et la mesure des transferts thermiques associés aux différentes configurations thermoconvectives citées ci-dessus (R_{\perp} , R_{\parallel} , R_{\perp} fixe, ainsi que R_{\parallel} sinuieux) dans des écoulements d'air à $9,5 \leq Re \leq 40$ et $3 \times 10^5 \leq Ra' \leq 4,5 \times 10^6$, dans des réacteurs chimiques de rapport d'allongement transversal $B = 5$, avec un substrat horizontal ou incliné à 8° . Une carte des différents régimes d'écoulements et des corrélations sur les longueurs d'établissement et les nombres de Nusselt sont proposées.

Les régimes de R_{\perp} et de R_{\parallel} ne permettant pas d'obtenir la qualité requise pour les dépôts de vapeurs chimiques, Hosokawa et al. (1993) [15], suivis par Spall (1996) [18, 19], proposent pour satisfaire cette exigence de se placer plutôt dans des conditions d'écoulements instationnaires apériodiques voire chaotiques, c'est à dire à grands nombres de Rayleigh et à petits nombres de Reynolds. Ils montrent que dans ce cas la moyenne temporelle des transferts de chaleur et des taux de dépôts devient quasi uniforme dans la direction transversale. Pour favoriser ce types d'écoulements instationnaires, Koizumi et Hosokawa (1993) [20] imposent dans leurs expériences des conditions aux limites thermiques non uniformes sur les parois latérales du canal, alors que Spall (1996) [19] perturbe l'écoulement en inclinant le canal de 2 degrés autour de son axe pendant 1 seconde. Evans et Greif (1993) [21] obtiennent aussi à hauts Ra , dans des conditions proches de celles de la CVD, des écoulements de PRB instationnaires, se présentant comme la superposition de R_{\perp} et de R_{\parallel} .

2.1.3. Quels modèles numériques choisir en CVD ?

Les écoulements dans les conditions de la CVD prennent souvent la forme de R_{\parallel} . Leur simulation numérique nécessite donc, a priori, des modèles 3D. D'autre part, vu les gradients de température mis en jeu, l'approximation de Boussinesq ne peut pas être employée. Enfin, dans de nombreux cas, il faut ajouter au modèle classique (équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie) la résolution de l'équation de conservation des espèces puisque au moins deux gaz sont présents dans le réacteur : le gaz « porteur » (H_2 , N_2 , He, Ar, etc.) et le gaz réactif (TMGa, AsH_3 , SiH_4 , etc.). L'équation de concentration peut être négligée si la concentration en gaz réactif est très faible et si on ne s'intéresse qu'à la dynamique de l'écoulement. Quoi qu'il en soit, les modèles utilisés en CVD sont relativement complexes. Leur résolution numérique est extrêmement coûteuse en temps de calcul si des hypothèses simplificatrices ne sont pas envisagées. Ainsi, dans quelques études (cf. Tableau 1), la diffusion axiale de

la chaleur et de la quantité de mouvement est négligée afin que le système d'équations devienne parabolique et puisse être résolu par une technique de marche en espace, économique en temps de calculs et en place mémoire (la solution est calculée, dans le sens de l'écoulement, sur une succession de plans 2D). Comme, les R_{\parallel} sont des structures stationnaires, il est aussi possible de résoudre les équations de conservation stationnaires. Notons que ces deux hypothèses (modèle parabolique ou stationnaire) ne permettent pas de simuler les R_{\perp} en déplacement. Le Tableau 1 résume les différents modèles utilisés par les études numériques en CVD et il donne les différents types de structures convectives observées à chaque fois. Les études de Ouazzani et Rosenberger (1990) [10] et de Nyce et al. (1992) [22] permettent de comparer les résultats obtenus avec des codes paraboliques et elliptiques.

2.2. Le refroidissement des composants électroniques

La miniaturisation des composants et des équipements électroniques a permis de réduire de manière considérable la taille des ordinateurs. Cependant, parallèlement, la quantité de chaleur volumique dissipée par les circuits intégrés a considérablement augmenté. Ceci étant un facteur limitant pour le bon rendement des ordinateurs, l'étude des transferts thermiques entre les plaques de circuits intégrés et le fluide réfrigérant circulant entre ces plaques est devenue une nécessité. La circulation de ce fluide entre deux plaques superposées de circuits intégrés peut être modélisée par un écoulement dans un canal plan. Les composants électroniques placés sur chacune des plaques, qui dissipent chacun une certaine quantité de chaleur, peuvent être représentés par des zones de chauffage ponctuelles. Ainsi, la géométrie utilisée pour traiter un problème de refroidissement de composants électroniques est celle de l'écoulement de PRB, mis à part le chauffage des plaques qui est périodique en général, et qui peut avoir lieu indifféremment sur la paroi du bas, sur la paroi du haut ou sur les deux plaques en même temps.

Les premiers articles dans le domaine du refroidissement des composants électroniques sont ceux de Kennedy et Zebib (1983) [23] et de Braaten et Patankar (1985) [24]. Kennedy et Zebib étudient expérimentalement et par simulation numérique les transferts thermiques au sein d'un écoulement d'air dans un canal plan dans lequel sont placées une ou deux sources de chaleur de petite taille sur la plaque du bas, sur la plaque du haut ou sur les deux plaques simultanément. Le transfert thermique maximal est obtenu lorsque le composant (la zone chauffée) est placé en bas plutôt qu'en haut. Ce résultat est confirmé par simulation numérique directe par Braaten et Patankar (1985) [24] qui montrent de plus que les transferts de chaleur sont augmentés lorsque le nombre de Prandtl du fluide réfrigérant est élevé (le fréon ($Pr = 3,5$) est plus recommandé que l'air ($Pr = 0,7$)) ou lorsque les parois de la conduite sont parfaitement conductrices de la chaleur plutôt qu'adiabatiques.

Plus récemment, Hasnaoui et al. (1991) [25] et Bilgen et al. (1995) [26] ont effectué des calculs numériques 2D d'écoulements dans un canal horizontal où la taille du ou des éléments chauffants placés sur la paroi du bas peut varier. Dans [26], pour $5 \times 10^3 \leq Ra \leq 2 \times 10^4$ et $0,1 \leq Pe \leq 2,5$, les auteurs comparent des simulations effectuées avec des conditions aux limites périodiques dans un domaine d'allongement $A = L/h = 2$ comportant un seul élément chauffant, avec des simulations effectuées avec des conditions aux limites ouvertes à l'entrée et à la sortie d'un domaine d'allongement $A = L/h = 2$ comportant 4 éléments chauffants placés périodiquement. Ils montrent que les nombres de Nusselt pariétaux sont les mêmes dans les deux configurations de calcul. Dans [25], le problème est simulé en utilisant des conditions aux limites périodiques dans un domaine d'allongement $A = L/h = 2$ pour $10^3 \leq Ra \leq 10^6$, $Re \leq 6$ et $Pr = 0,7$ (quelques résultats sont donnés à $Pr = 0,1$ et 7). A $Re = 0$, deux R_{\perp} symétriques et stationnaires sont observés de part et d'autre de l'élément chauffant. Ils deviennent dissymétriques, mais restent attachés à l'élément chauffant, pour $Re \neq 0$ et inférieur à une certaine valeur critique. Au-dessus de cette valeur critique, les cellules thermoconvectives se détachent et sont emportées par l'écoulement qui devient périodique en temps. La variation de ce nombre de Reynolds critique en fonction de Ra et de la taille de l'élément chauffant est déterminée. Tangborn (1992) [27], et Zhang et Tangborn (1994) [28], avec la même méthodologie (simulations numériques 2D et conditions aux limites périodiques), déterminent aussi la transition en fonction de Re et de Ra entre les structures transversales attachées à l'élément chauffant et celles qui se déplacent. Cependant, ils considèrent le cas plus réaliste où la température maximum de l'élément chauffant est atteinte, non pas par pallier, mais avec un accroissement sinusoïdal. Le problème est étudié pour $Pr = 1$, $Re \leq 100$ et $Ra \leq 80000$. Tangborn et al. (1995) [29] et Zhang et Tangborn (1995) [30] étendent leur étude à des configurations 3D périodiques dans les deux directions horizontales, en effectuant des simulations numériques à l'aide d'un code spectral. Alors que deux régimes d'écoulements sont observés dans le cas 2D (un régime stationnaire 2D et un régime 2D instationnaire périodique), dans le cas 3D, un régime supplémentaire stationnaire 3D est observé avant l'apparition du régime instationnaire périodique 3D. A $Ra = 20000$, $Re = 20$ et $Pr = 1$, Zhang et Tangborn (1995) [30] montrent que les calculs 2D, qui prédisent un régime instationnaire, sous-estiment de 12 à 13 % le nombre de Nusselt moyen sur les parois horizontales par rapport aux calculs 3D, qui eux prédisent un régime 3D stationnaire.

Lorsque la taille de l'élément chauffant est aussi grande que le domaine de calcul, Hasnaoui et al. (1991) [25] retrouvent la configuration classique des écoulements de PRB (chauffage uniforme sur toute la plaque du bas). Dans cette situation, dès que $Re \neq 0$, les R_{\perp} se déplacent. Les auteurs montrent, comme l'avaient déjà montré Ouazzani et al. (1989, 1990) [31,32], que le rapport Vr/U° de la

vitesse des R_{\perp} sur la vitesse moyenne de l'écoulement est une fonction linéaire décroissante de Ra et indépendante de Re . Nous reviendrons sur ce résultat à la Section 7.5 dans le Tableau 8 et les Figs. 22 et 23.

3. Les expériences pionnières (1920–1951)

Les premières recherches systématiques sur la convection naturelle sont les expériences de Henri Bénard (1900) [33] et le premier théoricien de la convection naturelle fut Lord Rayleigh (1916) [34]. La première étude sur le problème de Rayleigh–Bénard avec écoulement est attribuée à Paul Idrac (1920, 1921) [35,36]. On trouve dans son travail expérimental la première description des $R_{//}$, seule structure convective observée par cet auteur dans les écoulements de PRB.

A cette époque, la motivation principale de toutes les études est la compréhension de certains phénomènes météorologiques tels que l'alignement des bandes nuageuses sous l'action du vent. Aussi, dans les expériences de laboratoire, les écoulements ne sont pas de type Poiseuille mais de type Couette. En effet, pour reproduire l'entraînement cisaillé dû au vent, les écoulements d'air sont réalisés par le déplacement horizontal de la plaque supérieure du canal d'essai (procédé utilisé par Graham (1933) [37], Chandra (1938) [38], Brunt (1951) [3]) ou bien par la mise en place d'un tapis roulant chauffé en guise de plaque inférieure (procédé utilisé par Bénard et Avsec (1938) [39]). Toutes ces études expérimentales présentent un grand nombre de photographies. Elles permettent de comprendre qualitativement l'influence de l'écoulement sur l'agencement et la forme des structures convectives mais ces observations sont rarement confrontées à la théorie. De plus, toutes ces études se rapportent à des situations physiques mal définies quantitativement. Aucune donnée permet de calculer précisément les nombres de Rayleigh mais il est très probable que les observations sont faites pour des nombres de Rayleigh très supercritiques, c'est à dire pour des écoulements sortant du cadre de la théorie linéaire et de l'approximation de Boussinesq.

Parallèlement à Idrac [35,36], les $R_{//}$ ont été étudiés de manière plus systématique par Terada et al. (1928) [40] et par Terada et Tamano (1929) [41] qui ont réalisé de belles photos de ces structures dans des écoulements d'alcool, dont la surface se refroidit par simple évaporation, ou d'eau, chauffée par en dessous. La première observation des rouleaux transversaux, pour des écoulements cisaillés à petits nombres de Reynolds, est due aux météorologistes et physiciens anglais Philips et Sir Walker (1932) [42]. L'existence des R_{\perp} sera confirmée l'année suivante par Graham (1933) [37].

En France, sous l'égide de la « Commission de Turbulence Atmosphérique » à laquelle participe Bénard, des études systématiques de tous les problèmes qui touchent à la « turbulence atmosphérique » sont entreprises. Ainsi, Avsec

(1936–1938) [43–47], dans une série de notes au C.R.A.S., expose les résultats de ses expériences dans lesquelles il reproduit toutes les structures convectives observées antérieurement et il en observe de nouvelles (des R_{\parallel} sinueux notamment [46,48]). Le souci d'Avsec était de pouvoir modéliser au mieux les phénomènes thermoconvectifs se passant dans l'atmosphère. Or, le rapport d'échelle entre la dimension de l'atmosphère et la taille des couches fluides utilisées habituellement dans les expériences de laboratoire (généralement inférieure à 1 cm) étant très important, il s'est intéressé à la « production de tourbillons thermoconvectifs dans une couche d'air ayant une épaisseur de plusieurs centimètres ». En fait, tous les résultats qu'il présente sont toujours obtenus avec des couches d'air d'épaisseur inférieure à 8 cm. Lorsque la vitesse d'écoulement de l'air est supérieure à $2 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ environ, Avsec reproduit aisément les R_{\parallel} ; lorsque la vitesse est inférieure, il reproduit les R_{\perp} . Conformément à la théorie de Rayleigh pour la convection libre, Avsec observe l'existence d'un régime préconvectif stable avant la naissance des R_{\perp} ou des R_{\parallel} . La naissance de la thermoconvection se situe entre $Ra_0^* = 27\pi^4/4 = 657,5$ (valeur critique obtenue par Rayleigh dans le cas où la couche fluide est comprise entre deux plaques rigides, parfaitement conductrices mais « *sans frottement* ») et $Ra_0^* \approx 1709,5$ (valeur obtenue par Jeffreys (1928) [49] dans le cas plus réaliste où les mêmes plaques sont « *avec frottement* »; la valeur « exacte » bien connue dans ce cas est en fait $Ra_0^* = 1707,762$). Avsec justifie son résultat par le fait que la plaque de verre supérieure utilisée dans l'expérience est mauvaise conductrice de la chaleur.

Tous les résultats précédents obtenus par Avsec sont rapportés dans l'article de Bénard et Avsec (1938) [39]. Pour avoir une synthèse et une bibliographie complète de l'ensemble des résultats de cette époque tentant d'expliquer l'apparition des structures thermoconvectives dans l'atmosphère, on se référera à Brunt (1951) [3]. Les résultats des expériences de Chandra (1938) [38] pour visualiser les cellules convectives dans les problèmes de Bénard et Couette-Bénard y sont notamment rapportés. Quatre catégories de rouleaux sont observés en fonction de la vitesse de l'écoulement : des cellules polygonales, présentes à vitesse nulle et dont l'existence est probablement liée à des effets non-Boussinesq (variation de la viscosité avec la température), prennent la forme de fers à cheval dès que le débit devient non nul ; si on augmente encore la vitesse, il apparaît les R_{\perp} puis les R_{\parallel} . En suivant la classification de l'*International Cloud Atlas* de cette époque, Brunt donne la liste des nuages qui correspondent selon lui à chacune des quatre catégories. On constate donc qu'un grand nombre d'études de cette époque ont cherché à comprendre la formation des structures thermoconvectives de grande échelle présentes dans les écoulements turbulents de l'atmosphère, à partir d'expériences de laboratoire faisant intervenir des écoulements laminaires.

4. Les analyses de stabilité linéaire temporelle ou spatiale et les vérifications expérimentales (1962–1984, 2000)

4.1. Généralités

Après une longue période très peu productive, les recherches sur les écoulements de PRB repartent vers 1960. On effectue principalement des analyses de stabilité linéaire, complétées par des expériences permettant de vérifier les résultats des modèles théoriques. Des travaux se concentrent sur l'analyse des écoulements thermoconvectifs pleinement établis (cf. Section 4.2); d'autres étudient la zone d'entrée thermique, c'est-à-dire le début de la zone chauffée, là où les rouleaux convectifs se développent (cf. Section 4.3). L'ensemble des analyses de la stabilité linéaire temporelle ou spatiale des écoulements de PRB, dans la zone d'entrée ou dans la zone pleinement développée, est rassemblé dans le Tableau 2, dans le cas où l'écoulement de base est l'écoulement de Poiseuille purement conductif. Nous donnons la gamme des paramètres balayés, la forme des modes normaux et les critères de stabilité marginale, ainsi que le type de structures thermoconvectives observées au-dessus du seuil de transition. L'analyse de la stabilité linéaire temporelle dans le cas où l'écoulement de base est l'écoulement de R_{\parallel} pleinement établis sera traité à la Section 8.3.1.

La formulation mathématique des analyses de stabilité linéaire temporelle du Tableau 2 pour des écoulements de PRB entre deux plaques infinies et en conduite d'extension transversale finie est développée dans l'Annexe A. Nous rappelons ici uniquement les points principaux. Toutes les études se placent dans le cadre de l'approximation de Boussinesq. En ce qui concerne la zone pleinement développée, que l'allongement transversal B soit fini ou infini, le problème aux valeurs propres résultant de l'analyse de la stabilité linéaire temporelle de l'écoulement de base vis à vis des R_{\parallel} est indépendant du nombre de Reynolds, c'est à dire que l'analyse se ramène au cas du problème de Rayleigh-Bénard 2D. De plus, l'analyse de la stabilité linéaire temporelle dans le cas où l'écoulement de base est soumis à des perturbations 3D ($k_x \neq 0; k_y \neq 0$) dans une conduite d'allongement transversal infini se ramène, en utilisant la transformation de Squire [50], au cas de l'écoulement de PRB 2D soumis à des perturbations 2D ($k_x \neq 0; k_y = 0$) (cf. Platten et Legros (1984) [51]). Par contre, pour le problème complet (B fini, $k_x \neq 0; k_y \neq 0$) traité par Luijkx (1983) [52], Nicolas et al. (2000) [53] et Kato et Fujimura (2000) [54] aucune simplification n'est envisageable.

4.2. Cas des écoulements thermoconvectifs pleinement établis

4.2.1. Les R_{\parallel} de première et de deuxième espèce

Les premières études théoriques sur l'écoulement de PRB sont sans doute celles de Velte (1962) [55] et de Sami

Tableau 2

Cadre des différentes études de stabilité linéaire temporelle ou spatiale des écoulements de PRB (f représente une perturbation quelconque sur U, V, W, P ou T)

Table 2

Framework of the different analyses of the temporal or spatial linear stability of the PRB flows (f represents any perturbation on U, V, W, P , or T)

Références	Zone d'ENtrée ou zone	Extension latérale	Re ou (Pe)	Forme des perturbations et critères de stabilité neutre	Type de rouleaux convectifs observés
	Totallement Développée	($B = l/h$) ou Infinie	[Pr]		
Velte (1962) [55]	TD	F	étude (1)	$f(y, z, t) = \hat{f}(y, z) \cdot e^{\sigma_r t}$ avec $\sigma_r = 0$	$R_{//}$
Sani (1964) [56]	TD	F	étude qualitative	$f(y, z, t) = \hat{f}(y, z) \cdot e^{\sigma_r t}$ avec $\sigma_r = 0$	$R_{//}$
Mori et Uchida (1966) [57]	TD	I	230–570 [0,7]	$f(y, z, t) = \hat{f}(z) \cdot \cos(k_y y) \cdot e^{\sigma_r t}$ avec $\sigma_r = 0$	$R_{//}$ de 1 ^{ère} et 2 ^{ème} espèce
Gage et Reid (1968) [61]	TD	I	$10-10^6$ [1]	$f(x, y, z, t) = \hat{f}(z) \cdot e^{i(k_x x + k_y y + \sigma_i t)} \cdot e^{\sigma_r t}$ avec $\sigma_r = 0$	$R_{//}, R_{\perp}$, Robliques
Nakayama et al. (1970) [59]	TD	I	0–30000 [0–100]	$f(y, z, t) = \hat{f}(z) \cdot e^{ik_y y} \cdot e^{\sigma_r t}$ avec $\sigma_r = 0$	$R_{//}$
Platten (1971) [62]	TD	I	0–6700 [0,7–7]	$f(x, z, t) = \hat{f}(z) \cdot e^{i(k_x x + \sigma_i t)} \cdot e^{\sigma_r t}$ avec $\sigma_r = 0$	R_{\perp}
Tveiteder (1974) [63]	TD	I	$0-10^6$ [0,3–10]	$f(x, y, z, t) = \hat{f}(z) \cdot e^{i(k_x x + k_y y + \sigma_i t)} \cdot e^{\sigma_r t}$ avec $\sigma_r = 0$	$R_{//}, R_{\perp}$
Luijkx (1983) [52]	TD	I	0–8000 [0–453]	$f(x, y, z, t) = \hat{f}(z) \cdot e^{i(k_x x + k_y y + \sigma_i t)} \cdot e^{\sigma_r t}$ avec $\sigma_r = 0$	$R_{//}, R_{\perp}$
Luijkx (1983) [52]	TD	F	0–1770 (0–5,4)	$f(x, y, z, t) = \hat{f}(y, z) \cdot e^{i(k_x x + \sigma_i t)} \cdot e^{\sigma_r t}$ avec $\sigma_r = 0$	$R_{//}$
Platten et Legros (1984) [51]	TD	I	0–100 [7]	$f(x, y, z, t) = \hat{f}(z) \cdot e^{i(k_x x + k_y y + \sigma_i t)} \cdot e^{\sigma_r t}$ avec $\sigma_r = 0$	$R_{//}, R_{\perp}$
Platten et Legros (1984) [51]	TD	F	0–10 (2 ; 5,2)	$f(x, y, z, t) = \hat{f}(y, z) \cdot e^{i(k_x x + \sigma_i t)} \cdot e^{\sigma_r t}$ avec $\sigma_r = 0$	$R_{//}$
Müller et al. (1989, 1992) [68,78]	TD	I	(0–25) [∇Pr]	$f(x, z, t) = \hat{f}(z) \cdot e^{i(k_x x + \sigma_i t)} \cdot e^{\sigma_r t}$ avec $\sigma_r = 0$	R_{\perp}
Nicolas et al. (2000) [53]	TD	F	0–1770 (0–5,4)	$f(x, y, z, t) = \hat{f}(y, z) \cdot e^{i(k_x x + \sigma_i t)} \cdot e^{\sigma_r t}$ avec $\sigma_r = 0$	$R_{//}$
Kato et Fujimura (2000) [54]	TD	F	0–100 (1 ; 2 ; 3 ; 4)	$f(x, y, z, t) = \hat{f}(y, z) \cdot e^{i(k_x x + \sigma_i t)} \cdot e^{\sigma_r t}$ avec $\sigma_r = 0$	$R_{//}$
Hwang et Cheng (1973) [79]	EN	I	(10– ∞) [0,1– ∞]	$f(x, y, z) = \hat{f}(z) \cdot e^{ik_y y} \cdot e^{c_x x}$ avec $c_x = 0$	$R_{//}$
Cheng et Wu (1976) [80]	EN	I	(0,5–25) [10^{-3} – ∞]	$f(x, y, z) = \hat{f}(z) \cdot e^{i(k_x x + k_y y)} \cdot e^{c_x x}$ avec $c_x = 0$	$R_{//}, R_{\perp}$
Lee et Hwang (1991) [87]	EN	I	(30–100) [0,2–7]	$f(x, y, z, t) = \hat{f}(x, z, t) \cdot e^{ik_y y}$ avec $\partial f / \partial t = 0$ et $\partial f / \partial x \neq 0$	$R_{//}$

(1964) [56]. Mori et Uchida (1966) [57] réalisent une étude de la stabilité linéaire de l'écoulement de base vis à vis des deux espèces de $R_{//}$ qui sont représentées à la Fig. 7. La deuxième espèce est décrite comme étant la deuxième harmonique des $R_{//}$ classiques présentés sur la Fig. 3. Alors que pour ces derniers, le nombre de Rayleigh critique $Ra_{//1}^* = 1708$ quel que soit Re et que le nombre d'onde critique correspondant est $k_{y1}^* = 3,13$, pour la deuxième espèce, $Ra_{//2}^* = 18352$ quel que soit Re et $k_{y2}^* = 6,26$. Mori et Uchida [57] effectuent aussi des mesures expérimentales dans des écoulements d'air à $Re = 300$. Les $R_{//}$ de deuxième espèce ne sont pas visualisés expérimentalement mais les auteurs font remarquer, sans plus de précision, que lorsque l'on se rapproche de $Ra_{//2}^*$, le mouvement des $R_{//}$ de pre-

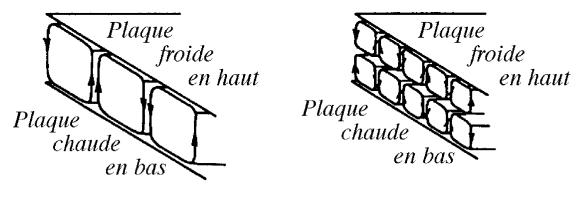


Fig. 7. Rouleaux longitudinaux de première et de deuxième espèce selon Mori et Uchida (1966) [57] (tiré de [57]).

Fig. 7. First type and second type longitudinal rolls according to Mori and Uchida (1966) [57] (extracted from [57]).

mière espèce devient irrégulier et instable. Ostrach et Kamotani (1975) [58] réalisent aussi des mesures expérimentales dans l'air pour $100 \leq Ra \leq 13500$ et $10 \leq Re \leq 100$. Vu la gamme de Re , seuls des R_{\parallel} sont observés. Cependant, à partir de $Re = 8000$, le profil transversal de température, normalement sinusoïdal, devient distordu et, pour Re encore plus grand, les R_{\parallel} deviennent instables. Les auteurs expliquent ce phénomène par l'apparition des R_{\parallel} de deuxième espèce, bien que ceux-ci ne soient pas visualisés dans l'expérience. En réalité, ce type de rouleaux n'a jamais été observé expérimentalement. Cependant, comme nous le verrons au Section 8.3, lorsque Re augmente à Re modéré, les R_{\parallel} stationnaires deviennent sinueux, périodiques en temps et en espace, puis apériodiques et chaotiques.

A propos des R_{\parallel} , nous mentionnons dans le Tableau 2 l'analyse linéaire de Nakayama et al. (1970) [59]. Cette étude originale, suivie par les expériences d'Akiyama et al. (1971) [60], s'est intéressée à la naissance des R_{\parallel} dans un écoulement de PRB où un écart de température ΔT constant est maintenu entre les deux plaques horizontales, mais où le gradient axial de température est non nul ($\nabla T \cdot i \neq 0$). Les cas $\Delta T > 0$, $\Delta T < 0$, $\nabla T \cdot i > 0$ et $\nabla T \cdot i < 0$ sont analysés. Les résultats montrent que $|Ra_{\parallel}^*|$ diminue lorsque $\|\nabla T \cdot i\|$ augmente et que l'écoulement de Poiseuille est moins stable lorsque Pr est petit. Les courbes expérimentales et théoriques $|Ra_{\parallel}^*| = f(\|\nabla T \cdot i\|)$ coïncident assez bien.

4.2.2. Seuil d'apparition des R_{\perp} en conduite d'extension latérale infinie et vérification expérimentale de l'augmentation de Re avec Ra_{\perp}^*

L'analyse de stabilité linéaire de Gage et Reid (1968) [61] pour $B \rightarrow \infty$ se limite à $Pr = 1$ lorsque $Re > 0$ et s'étend de $Re = 0$ à 10^6 . Elle autorise des perturbations donnant naissance à des R_{\parallel} , à des R_{\perp} ou à des cellules thermoconvectives 3D quelconques (par exemple, des cellules d'axes obliques à la direction de l'écoulement de base). Pour ces structures obliques, le nombre de Rayleigh critique est une fonction croissante de Re et se situe entre $Ra_{\parallel}^* = 1708$ et Ra_{\perp}^* . Pour $Re \gtrsim 7200$, les instabilités d'origine visqueuse donnent naissance à des ondes transverses de type Tollmien-Schlichting. Platten (1971) [62], en considérant des perturbations 2D ne permettant la naissance que des R_{\perp} , et Tveitereid (1974) [63], en considérant la naissance d'instabilités sous la forme de R_{\perp} , de R_{\parallel} , et d'ondes de Tollmien-Schlichting, vérifient, pour tous les nombres de Prandtl, les résultats obtenus par Gage et Reid (1968) [61] à $Pr = 1$ (cf. Tableau 2).

Les premiers qui se soient intéressés expérimentalement à l'action de la vitesse de l'écoulement sur le nombre de Rayleigh critique Ra^* , en particulier sur l'augmentation de Ra_{\perp}^* avec Re , sont Platten et Lefebvre (1971) [64]. En montant une expérience de type Schmidt-Milverton (1935) [65] avec de l'eau dans une conduite d'allongements $A = L/h \approx 150$ et $B = l/h \approx 80$, ils montrent que Ra^* croît de 1708 à 2063 lorsque l'on passe de $Re = 0$ à $Re = 28$. Ils en dédui-

sent que la preuve expérimentale de l'augmentation de Ra_{\perp}^* avec Re , montrée théoriquement par Platten (1971) [62], est apportée. Cependant, comme nous le verrons au Tableau 3 de la Section 4.2.4, dans le cas d'un écoulement d'eau ($Pr = 6,4$), dans une conduite de si grand allongement transversal ($B = 80$), pour un nombre de Reynolds si « élevé » ($Re = 28$), les structures thermoconvectives ne sont pas des R_{\perp} mais des R_{\parallel} pour lesquels Ra_{\parallel}^* ne varie pas avec Re . Donc, la variation de Ra^* dans l'expérience de Platten et Lefebvre [64] est due à autre chose. Plusieurs explications à ce problème ont été données. Platten et Legros (1984) [51] (au Chapitre VIII, pp. 545 à 556) recherchent théoriquement si une structure résiduelle, se superposant à l'écoulement de R_{\parallel} et ayant une périodicité dans la direction longitudinale, ne pourrait pas provoquer l'augmentation de Ra^* . La structure qui résulte de cette superposition pourrait avoir l'apparence de R_{\parallel} obliques ou de rouleaux sinueux (voir la Section 8.3 et l'Annexe A à ce sujet). Platten et Legros (1984) [51] vérifient leur hypothèse expérimentalement en plaçant une sonde de température très sensible en un point fixe au milieu d'un écoulement de R_{\parallel} dans l'eau. Ils enregistrent un signal sinusoïdal témoignant de la présence effective d'une périodicité longitudinale résiduelle dans l'écoulement. Cependant, ces observations sont faites à $Re \approx 1,5$; elles ne concordent pas avec des photos prises à des nombres de Reynolds plus élevés ($Re = 28$) montrant des R_{\parallel} parfaitement réguliers et ne laissant apparaître ni inclinaison ni sinuosité. Platten et Legros font alors une deuxième proposition : ils montrent qu'à $Re = 28$ l'intervalle de temps pendant lequel un volume d'eau élémentaire passe sur la plaque chauffée dans l'expérience de Platten et Lefebvre (1971) [64] est environ égal au double du temps caractéristique nécessaire pour atteindre l'état thermoconvectif stationnaire du problème de convection naturelle équivalent ($Re = 0$). Il est donc très probable que les R_{\parallel} ne soient pas complètement établis dans cette expérience. En effet, comme on va le voir à la Section 4.3 (voir la Fig. 13), lorsqu'on se trouve dans la zone d'entrée thermique, Ra^* est plus élevé que dans la zone où l'écoulement est pleinement établi et il décroît lorsque x augmente. La mise en évidence de l'augmentation de Ra_{\perp}^* avec Re a en fait été réalisée par Luijkx et al. (1981) [66] grâce à une expérience de visualisation dans de l'huile de silicone. Cette expérience a montré que les R_{\perp} disparaissent de plus en plus de la conduite quand Re augmente (cet élément visuel faisait défaut dans la première expérience de Platten et Lefebvre (1971) [64]). Le canal utilisé est très long ($A = L/h \approx 100$) et plus de 90 R_{\perp} peuvent s'y développer. Lorsque le débit est suffisamment élevé, les R_{\perp} disparaissent de la zone d'entrée du canal et, plus Re augmente, plus les R_{\perp} sont rejettés vers l'aval, jusqu'à disparaître complètement. Les auteurs supposent alors la présence des R_{\parallel} , bien que ceux-ci n'aient pas pu être observés par la méthode de visualisation utilisée.

En prémisses à une analyse de la stabilité faiblement non-linéaire des écoulements 2D de R_{\perp} (cf. Section 5.3), Müller (1990) [67] et Müller et al. (1992) [68] analysent la stabilité

linéaire temporelle de l'écoulement de PRB 2D. En recherchant la solution des équations de perturbation linéarisées sous la forme $f(x, z, t) = \hat{f}(z) \cdot e^{i(k_x x + \sigma_i t)}$, ils montrent, par des développements en puissance du nombre de Reynolds, que le nombre de Rayleigh, la pulsation temporelle et le nombre d'onde critiques pour les R_{\perp} s'écrivent :

$$\begin{aligned} Ra_{\perp}^*(Re, Pr) &= 1707,762 + (0,02156 + 0,02378Pr \\ &\quad + 2,194Pr^2 + 0,3636Pr^3 \\ &\quad + 0,42Pr^4) \\ &\quad \times (0,5117 + Pr)^{-2}Re^2 + O(Re^4) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_i^*(Re, Pr) &= Pr(1,409 + 4,105Pr) \\ &\quad \times (0,5117 + Pr)^{-1}Re + O(Re^3) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} k_x^*(Re, Pr) &= 3,116 - (1,930 + 71,03Pr - 946,3Pr^2 \\ &\quad - 182,8Pr^3 - 226,9Pr^4 \\ &\quad + 565,6Pr^5 - 194,9Pr^6) \\ &\quad \times (0,5117 + Pr)^{-4}10^{-6}Re^2 + O(Re^4) \end{aligned} \quad (3)$$

D'après Müller (1990) [67], ces formules analytiques sont précises à 1 % près tant que $Pe < 26$. Elles sont aussi en bon accord avec les résultats de l'étude récente de Carrière et Monkewitz (1999) [69] sur la stabilité convective et absolue des R_{\perp} et des R_{\parallel} dans des conduites d'extension latérale infinie (cf. Section 5.3).

4.2.3. Paramètres critiques Ra_{\perp}^* , Ra_{\parallel}^* et Re^* en conduite d'extension latérale finie

Pour avoir une analyse qualitativement exacte de l'influence de Re , de B et de Pr sur les nombres de Rayleigh critiques d'apparition des R_{\perp} et des R_{\parallel} (Ra_{\perp}^* et Ra_{\parallel}^*), dans le cas d'une conduite d'extension latérale finie, il faut attendre la parution de l'article de Luijckx et al. (1981) [66]. Cette analyse a déjà été présentée dans le chapitre introduc-
tif à la Section 1.1. Elle peut se résumer graphiquement par le diagramme de stabilité de la Fig. 5. On rappelle brièvement les résultats principaux de cette analyse :

- $Ra_{\parallel}^* = Ra_{\parallel}^*(B)$; Ra_{\parallel}^* est indépendant de Re et de Pr ;
- $Ra_{\perp}^* = Ra_{\perp}^*(Re, Pr, B)$; Ra_{\perp}^* augmente si Re , Pr ou $1/B$ augmentent;
- pour $0 \leq Re < Re^*$, $Ra_{\perp}^* \leq Ra_{\parallel}^*$: il apparaît des R_{\perp} au seuil de transition;
- pour $Re > Re^*$, $Ra_{\perp}^* \geq Ra_{\parallel}^*$: il apparaît des R_{\parallel} au seuil de transition;
- $Re^* = Re^*(Pr, B)$; Re^* diminue si Pr augmente à B fixé.

On notera que ces résultats *qualitatifs* sont le fruit d'une étude de stabilité linéaire temporelle pour un écoulement de base 3D et des perturbations 3D, dont les résultats *quantitatifs* auraient dû être publiés dans la référence [9] («to be published») de Luijckx et al. (1981) [66]. Cette publication n'ayant jamais paru, la théorie et la totalité des

résultats quantitatifs se trouvent dans la thèse de Luijckx (1983) [52] et dans l'article de Nicolas et al. (2000) [53]. Le développement complet de l'analyse théorique lorsque $B \rightarrow \infty$, et la trame lorsque $B \neq \infty$ se trouvent aussi au chapitre VIII du livre de Platten et Legros (1984) [51] et en *Annexe A* du présent article. Kato et Fujimura (2000) [54] viennent aussi de publier une analyse théorique 3D qui, dans sa première partie, est comparable à celles que nous venons de citer (analyse linéaire temporelle en conduites d'extension latérale finie). Par contre, dans sa deuxième partie, elle va bien au-delà puisqu'elle étudie à partir de deux équations d'amplitudes couplées l'interaction faiblement non-linéaire entre les R_{\perp} et les R_{\parallel} au voisinage du point triple en $Re = Re^*$ et $Ra = Ra_{\perp}^* = Ra_{\parallel}^*$ (cf. Fig. 5), dans des conduites d'extension latérale finie avec des conditions aux limites thermiques adiabatiques et parfaitement conductrices sur les parois latérales. La stabilité de l'écoulement de Poiseuille conductif, des R_{\perp} , des R_{\parallel} et d'une structure mixte se présentant comme la superposition de R_{\perp} et de R_{\parallel} est étudiée au voisinage de ce point triple. Plus de détails sur cette étude sont donnés à la Section 8.2.

On trouvera des graphes et des tableaux de valeurs numériques, issus des analyses de stabilité linéaire temporelle 3D, donnant les variations de Ra_{\perp}^* , Ra_{\parallel}^* , Re^* , k_x^* , σ_i^* et $(Vr/U^*)^*$ (rapport entre la vitesse Vr des R_{\perp} et la vitesse moyenne U^* de l'écoulement dans le canal) pour une large gamme des paramètres Re , Pr et B dans les références [53,54,66]. On reproduit les graphes $Ra_{\parallel}^* = f(B)$ et $Ra_{\perp}^* = f(Re, B)$ à $Pr = 10$ dans les Figs. 8 et 9.

4.2.4. Critique des résultats obtenus par analyse de stabilité linéaire temporelle

Comme le montre la Fig. 8 ou les travaux de Kurtzwieg (1965) [70] et de Luijckx et Platten (1981) [71], l'analyse

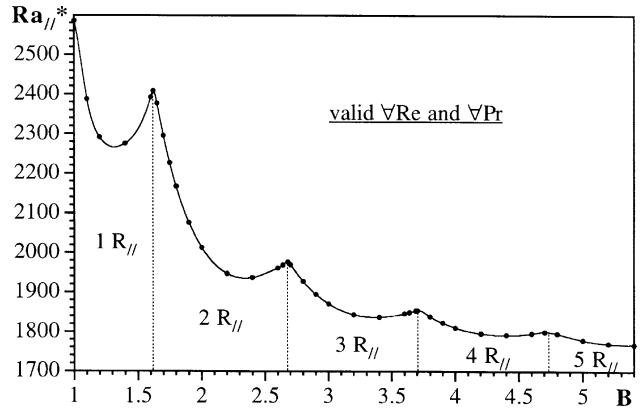


Fig. 8. Nombre de Rayleigh critique d'apparition des R_{\parallel} en fonction de l'allongement transversal B , et nombre de R_{\parallel} apparaissant au-dessus du seuil de transition, d'après une analyse de la stabilité linéaire temporelle de l'écoulement de Poiseuille purement conductif (tiré de Nicolas et al. (2000) [53]).

Fig. 8. Critical Rayleigh number for the R_{\parallel} as a function of the transversal aspect ratio B , and number of R_{\parallel} appearing just above the critical point, according to the temporal linear stability analysis of the purely conductive Poiseuille flow (extracted from Nicolas et al. (2000) [53]).

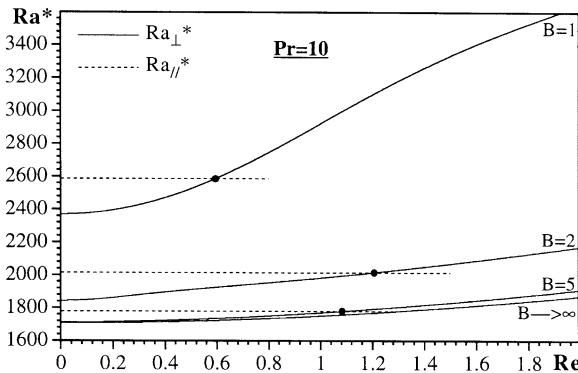


Fig. 9. Nombres de Rayleigh critiques d'apparition des R_{\perp} et des R_{\parallel} en fonction de Re , à $Pr = 10$, pour plusieurs allongements transversaux B de la conduite. Les points d'intersection donnent les valeurs correspondantes de Re^* sur l'axe des abscisses (tiré de Nicolas et al. (2000) [53]).

Fig. 9. Critical Rayleigh numbers for the R_{\perp} and the R_{\parallel} as a function of Re , at $Pr = 10$, for several transversal aspect ratios B of the duct. The intersection points give the corresponding values of Re^* on the abscissa axis (extracted from Nicolas et al. (2000) [53]).

de la stabilité linéaire temporelle prédit la formation d'un nombre pair ou impair de R_{\parallel} stationnaires au-dessus du seuil de transition en fonction de la valeur du rapport de forme B . Ce résultat est vérifié expérimentalement et numériquement en convection naturelle. Cependant, en convection mixte, il est en contradiction avec toutes les expériences et les simulations numériques directes qui prévoient un nombre pair de R_{\parallel} quel que soit $B > 1,1$ et $Re > 0$ (voir, par exemple, Narusawa (1993) [72], Yu et al. (1997) [73], Chang et al. (1997) [74] et Chang et Lin (1998) [75]). Shahda et Narusawa (1997) [76] ont donné une explication théorique à cette contradiction. Après avoir calculé une expression analytique du profil de vitesse axiale $U(t)$ pour les écoulements de R_{\parallel} , en comparant les taux de croissance initiaux de ces profils (dU/dt à $t = 0$) pour un nombre pair et un nombre impair de R_{\parallel} , ils montrent effectivement qu'un seul R_{\parallel} apparaît lorsque $B \leq 1,1$ et qu'un nombre pair de R_{\parallel} est sélectionné lorsque $1,1 < B \lesssim 10$. En appliquant le second principe de la thermodynamique, Narusawa (2001) [77] montre également par une analyse théorique et des simulations numériques que le passage d'une paire à deux paires de R_{\parallel} pleinement établis est caractérisé par une variation brutale et discontinue des taux de production d'entropie liés aux dissipations thermiques et aux dissipations visqueuses.

Nicolas et al. (2000) [53] comparent les courbes de transition Ra_{\parallel}^* et Ra_{\perp}^* déterminées par l'analyse linéaire temporelle pour B fini aux courbes de transition déterminées expérimentalement ou par simulations numériques directes entre écoulement de Poiseuille et R_{\parallel} d'une part, et entre écoulement de Poiseuille et R_{\perp} d'autre part. Ces comparaisons, effectuées pour $(Pr; B) = (0,7; 2), (6,4; 3,6)$ et $(453; 5,25)$, montrent que les résultats théoriques, expérimentaux et numériques coïncident quantitativement en ce qui concerne Ra_{\parallel}^* (voir le Tableau 3 et la Fig. 10). Par contre, les courbes $Ra_{\perp}^*(Re)$ dans le plan $Ra-Re$ sont toujours nettement en dessous des courbes de transition expérimentales (cf. Fig. 10) et

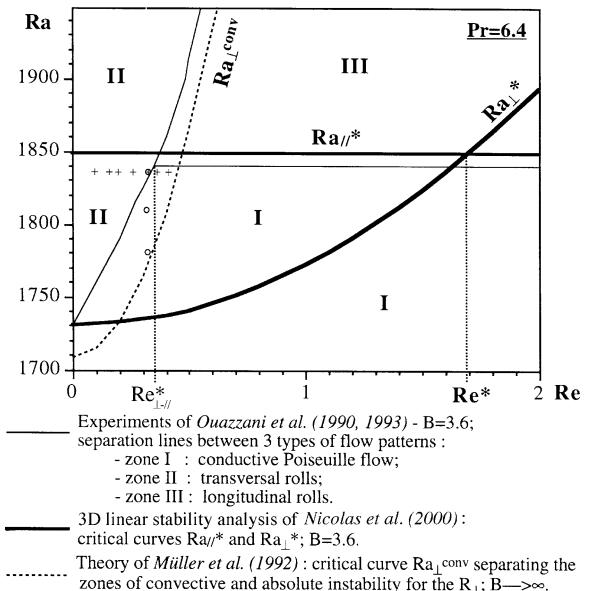


Fig. 10. Comparisons, at $Pr = 6,4$, between (i) the stability diagram determined experimentally by Ouazzani et al. (1990, 1993) [32,100], (ii) the curves $Ra_{\parallel}^*(Re)$ and $Ra_{\perp}^*(Re)$ calculated by temporal linear stability analysis by Luijkh (1983) [52] and Nicolas et al. (2000) [53], and (iii) the transition curve between the convectively and absolutely unstable R_{\perp} calculated by Müller et al. (1992) [68] for a 2D PRB flow. The symbols \circ and $+$ correspond to the computations of Fig. 17 (extracted from Nicolas et al. (2000) [53]).

Fig. 10. Comparisons, at $Pr = 6,4$, between (i) the stability diagram determined experimentally by Ouazzani et al. (1990, 1993) [32,100], (ii) the curves $Ra_{\parallel}^*(Re)$ and $Ra_{\perp}^*(Re)$ computed by temporal linear stability analysis by Luijkh (1983) [52] and Nicolas et al. (2000) [53], and (iii) the transition curve between the convectively and absolutely unstable R_{\perp} computed by Müller et al. (1992) [68] for a 2D PRB flow. The symbols \circ and $+$ correspond to the computations of Fig. 17 (extracted from Nicolas et al. (2000) [53]).

numériques entre écoulement de Poiseuille et R_{\perp} . Ce décalage se répercute sur la valeur du nombre de Reynolds critique : la valeur de Re^* déterminée par la théorie linéaire est toujours très supérieure à la valeur de $Re_{\perp-//}^*$ déterminée expérimentalement ou par simulations numériques (cf. Fig. 10 et Tableau 3). On notera que Re^* est obtenu pour $Ra = Ra_{\perp}^* = Ra_{\parallel}^*$, c'est à dire qu'il se rapporte à des perturbations infinitésimales. Par contre, comme expérimentalement on ne peut mesurer que des perturbations finies, $Re_{\perp-//}^*$ est déterminé en général pour des valeurs supercritiques du nombre de Rayleigh (c'est à dire pour $Ra > Ra_{\perp}^*$ et $Ra > Ra_{\parallel}^*$). Ainsi, dans la plupart des cas du Tableau 3, les valeurs de $Re_{\perp-//}^*$ correspondent à une transition entre R_{\perp} et R_{\parallel} plutôt qu'à un point triple entre écoulement de Poiseuille, R_{\perp} et R_{\parallel} . Quoi qu'il en soit, on vient de voir que la théorie de la stabilité linéaire temporelle n'est pas capable de retrouver quantitativement la valeur du nombre de Rayleigh critique expérimental entre l'écoulement de Poiseuille et les R_{\perp} . Nous verrons à la Section 5.1 que pour cela il faut prendre en compte la croissance temporelle et spatiale des perturbations et, donc, étudier la stabilité linéaire convective/absolue des écoulements de PRB. D'ores et déjà, on peut voir sur la

Tableau 3

Comparaison des valeurs théoriques, expérimentales et numériques des nombres de Reynolds critiques Re^* et $Re_{\perp-\parallel}^*$ en fonction de Pr et de B (et pour plusieurs valeurs de Ra en ce qui concerne $Re_{\perp-\parallel}^*$)

Table 3

Comparison of the theoretical, experimental and numerical values of Ra_{\parallel}^* and of the critical Reynolds numbers Re^* and $Re_{\perp-\parallel}^*$ as a function of Pr and B (and for several values of Ra concerning $Re_{\perp-\parallel}^*$)

Référence	Méthode	Pr	B	Ra_{\parallel}^* ou (Ra)	Re^* ou ($Re_{\perp-\parallel}^*$)
Ouazzani et al. (1989) [31]	expériences	0,7 (air)	18,5	(2000) (4000)	(4) (9)
Chen et Lavine (1996) [131]	simulations numériques	0,7	2	2000 (4000)	(5 ± 1) (6 ± 1)
Luijkx (1983) [52]	analyse linéaire	0,7	2	2013,24	8,5
Yu et al. (1997) [128]	expériences	0,72 (air)	5,2 12	1770,05 (3000) (4000) (8000)	6,74 (6,5) (10) (15)
Luijkx (1983) [52]	analyse linéaire	1	2	2013,24	6,98
Ouazzani et al. (1990) [32]	expériences	6,4 (eau)	5,2 3,63	1770,05 1840 ± 80 (2000) (3460)	5,66 (0,35 ± 0,1) (0,5) (0,7)
Luijkx (1983) [52]	analyse linéaire	6,4	3,6	1849	1,7
Luijkx (1983) [52]	analyse linéaire	7	2	2013,24	1,67
Luijkx et al. (1981) [66]	expériences	450 (huile de silicone)	5,25	(4500)	(1,7 × 10 ⁻³)
Luijkx (1983) [52]	expériences	450	5,25	1712 ± 220	(6,4 ± 0,8) × 10 ⁻³
Luijkx (1983) [52]	analyse linéaire	453	2	2013,24	27,2 × 10 ⁻³
			5,2	1770,05	22,9 × 10 ⁻³

Fig. 10, que la courbe Ra_{\perp}^{conv} obtenue par une théorie spatio-temporelle développée par Müller et al. (1989, 1992) [68,78] à partir d'une équation de Ginzburg–Landau (cf. Section 5) pour des écoulements de R_{\perp} 2D permet de traduire de manière très satisfaisante la transition observée expérimentalement dans une conduite d'allongement $B = 3,6$.

4.3. Cas des écoulements dans la zone d'entrée thermique

A partir de l'abscisse $x = 0$ où le gradient vertical de température est imposé, un écoulement pleinement développé hydrodynamiquement a besoin d'une certaine distance pour s'établir thermoconvectivement. De nombreux auteurs se sont intéressés à cette zone et ont essayé d'y déterminer les conditions marquant la naissance des instabilités. Parmi les premiers à avoir étudié le cas de l'écoulement de PRB, on trouve Hwang et Cheng (1973) [79]. Ils réalisent une étude de stabilité linéaire pour un écoulement entre deux plaques infinies. Les modes normaux introduits dans les équations de perturbations linéarisées se rapportent uniquement aux R_{\parallel} stationnaires ; ils sont de la forme $f(x, y, z) = \hat{f}(z) e^{c_x x} e^{ik_y y}$ (cf. Tableau 2). La stabilité marginale est obtenue lorsque le coefficient d'amplification spatiale dans la direction longitudinale c_x s'annule. Le profil thermique de l'écoulement de base est tel qu'en $x = 0$ (là où commence le chauffage) la température du fluide est

uniforme et égale à la température de la plaque supérieure froide ; c'est à dire que la conduction axiale de la chaleur vers l'amont est négligée dans l'écoulement de base. Pour un nombre de Prandtl $Pr \geq 0,7$ et à grand nombre de Péclet, il est montré que l'écoulement de base est plus stable dans la zone d'entrée que vers l'aval ; le résultat est inverse pour $Pr \leq 0,2$. Dans les deux cas, lorsqu'on s'éloigne de l'entrée, on retrouve que Ra^* tend vers 1708.

L'étude précédente est généralisée par Cheng et Wu (1976) [80] qui introduisent deux modifications importantes : (i) les perturbations sont 3D avec des modes normaux de la forme $f(x, y, z) = \hat{f}(z) e^{c_x x} e^{i(k_x x + k_y y)}$ (les R_{\perp} ne sont donc pas écartés) ; (ii) la conduction de la chaleur vers l'amont est rendue possible en considérant un canal allant de $x = -\infty$ à $x = +\infty$ et en prenant des conditions aux limites adéquates. L'étude montre que, pour $Pe < 25$, l'hypothèse de fluide à température uniforme en $x = 0$ est erronée et que la conduction axiale de la chaleur ne peut pas être négligée. A faible nombre de Péclet, la courbe $Ra_{\parallel}^* = f(x)$ est nettement en dessous de celle obtenue par Hwang et Cheng (1973) [79] car le problème est elliptique et les perturbations remontent vers l'amont de l'écoulement. D'autre part, les R_{\perp} sont plus stables que les R_{\parallel} pour $Pe \leq 0,5$ et $Pr \geq 1$ (c'est à dire à petit nombre de Reynolds), et ils se développent uniquement en amont et juste en aval de $x = 0$ (cf. Fig. 11). Plus loin en aval, on retrouve les R_{\parallel}

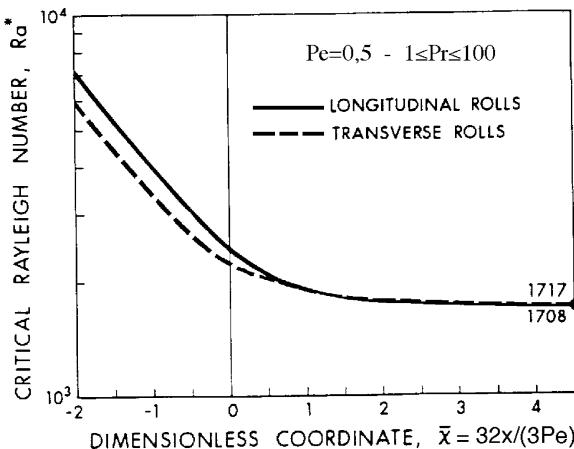


Fig. 11. Courbes de stabilité linéaire de l'écoulement de Poiseuille vis à vis des R_{\perp} et des R_{\parallel} dans la zone d'entrée thermique d'un canal d'extension latérale infinie chauffé uniformément par le bas pour $1 \leqslant Pr \leqslant 100$ et $Pe = 0.5$ (tiré de Cheng et Wu (1976) [80]).

Fig. 11. Linear stability curves of the Poiseuille flow versus the R_{\perp} and the R_{\parallel} in the thermal entrance zone of a channel of infinite transversal extension uniformly heated from below for $1 \leqslant Pr \leqslant 100$ and $Pe = 0.5$ (extracted from Cheng and Wu (1976) [80]). © ASME. Reproduced with permission.

puisque la conduite est d'extension latérale infinie. De telles configurations d'écoulements avec un R_{\perp} fixe juste à l'entrée sur la plaque chauffée, suivi par un écoulement de R_{\parallel} vers l'aval, ont été observées récemment dans les simulations numériques 3D de Nobile et Onesti (1996) [81] et Spall (1996) [18,19] et dans les expériences de Cheng et al. (2002) [82] et dans une moindre mesure dans celles de Lir et al. (2001) [83].

Sans avoir connaissance du travail de Cheng et Wu (1976) [80], Kamotani et Ostrach (1976) [84] puis Kamotani et al. (1979) [85] étudient expérimentalement la zone d'entrée thermique dans des écoulements d'air. Les deux études concernent les gammes d'écoulements suivants : $1000 \leqslant Ra \leqslant 31000$ et $30 \leqslant Re \leqslant 1100$ pour la première, $2,2 \times 10^4 \leqslant Ra \leqslant 2,1 \times 10^5$ et $50 \leqslant Re \leqslant 300$ pour la seconde. Les auteurs constatent que la longueur d'entrée thermique décroît lorsque Ra croît ou lorsque Re^2/Gr décroît. Dans les expériences de Kamotani et al. (1979) [85], Ra^* est déterminé lorsqu'on peut détecter une petite déviation dans le profil transversal de température en un x donné. Bien que l'on retrouve que Ra^* décroisse avec x , les valeurs expérimentales de Ra^* dans la zone d'entrée sont nettement supérieures aux valeurs théoriques : à la même position axiale $x = 0,01$, $Ra^* \approx 30000$ pour l'expérience alors que $Ra^* \approx 3000$ pour la théorie. Ce résultat sera confirmé peu après par une expérience de même type réalisée par Hwang et Liu (1976) [86]. L'explication donnée est qu'en théorie les perturbations caractérisant Ra^* sont infinitésimales alors qu'expérimentalement les appareils de mesure n'enregistrent que des perturbations finies. Cependant, nous allons voir ci-dessous qu'un critère de stabilité neutre, basé sur la recherche du point où l'amplification temporelle des

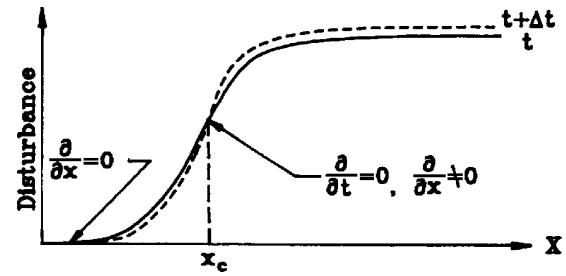


Fig. 12. Représentation schématique des critères mathématiques utilisés pour définir le seuil de stabilité marginale dans la zone d'entrée des écoulements de PRB (tiré de Lee et Hwang (1991) [88]).

Fig. 12. Schematic representation of the mathematical criteria used to define the marginal stability threshold in the entrance zone of the PRB flows (extracted from Lee and Hwang (1991) [88]).

perturbations est nulle, permet de retrouver à peu de chose près la courbe critique expérimentale.

En effet, une étude de la stabilité linéaire de l'écoulement de PRB dans la zone d'entrée thermique a été effectuée plus récemment par Lee et Hwang (1991) [87,88]. Dans le premier article [87], ils poursuivent le travail de Hwang et Cheng (1973) [79] (étonnamment, ils laissent quasiment sous silence le travail de Cheng et Wu (1976) [80]). Ils considèrent que l'écoulement de base a un profil de température uniforme en $x = 0$ et les perturbations 3D sont écrites sous la forme $f(x, y, z, t) = \hat{f}(x, z, t) e^{ik_y y}$ (seuls les R_{\parallel} sont envisagés). L'originalité de cette étude est le critère utilisé pour déterminer la stabilité neutre : « $\partial f/\partial t = 0$ et $\partial f/\partial x \neq 0$ ». Dans les deux études théoriques précédentes [61,80] (cf. Tableau 2), le problème est stationnaire et le critère utilisé est $c_x = 0$ ce que Lee et Hwang traduisent par « $\partial f/\partial x = 0$ à t fixé ». La Fig. 12 compare les deux critères : « $\partial f/\partial t = 0$ et $\partial f/\partial x \neq 0$ » permet de déterminer, pour un nombre de Rayleigh fixé, le point noté x_c sur l'axe, en amont duquel les perturbations s'amortissent et en aval duquel elles s'amplifient dans le temps ; « $\partial f/\partial x = 0$ à t fixé » détermine la position critique d'apparition de la perturbation, qui se trouve toujours en amont de x_c . Ainsi, comme le montrent les graphes de la Fig. 13, le nombre de Rayleigh critique obtenu par Lee et Hwang (1991) [87] est supérieur à celui des analyses linéaires précédentes et il permet même d'approcher très correctement les résultats expérimentaux. Cette figure montre aussi que Ra^* décroît en s'éloignant de la zone d'entrée, quel que soit le nombre de Prandtl (à la différence de Hwang et Cheng (1973) [79]). On notera qu'une étude similaire à celle de Lee et Hwang mais valable à petits Pe , c'est à dire une étude prenant en compte la diffusion axiale de la chaleur et la naissance des instabilités sous la forme de R_{\perp} , n'a pas encore été menée à ce jour.

5. Stabilités convective et absolue des rouleaux transversaux et des rouleaux longitudinaux (1989–2001)

Dans cette partie, nous commençons par rappeler les notions générales sur les instabilités convectives et abso-

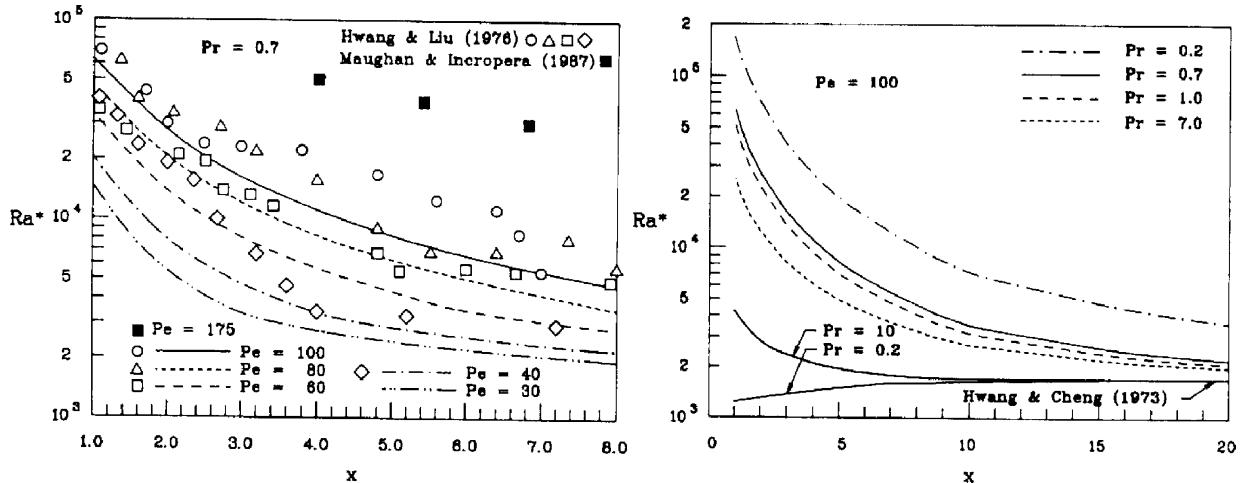


Fig. 13. Comparaisons, entre théorie linéaire et expériences, de l'évolution axiale du nombre de Rayleigh critique d'apparition des R_{\parallel} , dans la zone d'entrée thermique, en fonction de Pe et Pr (tiré de Lee et Hwang (1991) [87]).

Fig. 13. Comparisons, between linear theory and experiments, of the axial evolution of the critical Rayleigh number for the appearance of the R_{\parallel} , in the thermal entrance zone, as a function of Pe and Pr (extracted from Lee and Hwang (1991) [87]). © ASME. Reproduced with permission.

lues (Section 5.1) ainsi que sur les équations de Ginzburg–Landau (Section 5.2), ce modèle 1D ayant été très souvent utilisé ces dernières années pour étudier la dynamique linéaire et faiblement non-linéaire des écoulements de PRB. À la Section 5.3, nous nous intéressons aux études qui ont déterminé le nombre de Rayleigh critique Ra_{\perp}^{conv} entre les zones d'instabilité convective et absolue pour les R_{\perp} et qui ont montré que les R_{\parallel} ne sont jamais absolument instables dans des écoulements de PRB entre deux plaques infinies. Dans le cas des conduites d'extension latérale finie, nous montrons que des études complémentaires, théoriques et numériques, seraient nécessaires pour expliquer certains phénomènes. À la Section 5.4, nous exposons des résultats concernant l'influence d'un bruit blanc, imposé en entrée de conduite, sur des écoulements de R_{\perp} convectivement instables.

5.1. A propos des instabilités convectives et absolues

Les analyses de stabilité linéaire des écoulements de PRB pleinement établis qui sont présentées à la Section 4.2 s'intéressent uniquement à la *croissance temporelle* de perturbations infinitésimales. Dans ces études, un écoulement est dit «linéairement stable» si, quelle que soit la perturbation infinitésimale à laquelle il est soumis, l'amplitude de cette perturbation décroît dans le temps. Il est dit «linéairement instable» s'il existe au moins une perturbation dont l'amplitude croît dans le temps. Ce critère est suffisant pour déterminer l'*instabilité absolue* des écoulements dans le cas de systèmes fermés, c'est-à-dire pour les systèmes dans lesquels aucun fluide n'entre ou ne sort du domaine : les écoulements de Rayleigh–Bénard ou de Taylor–Couette par exemple. Il est insuffisant dans le cas des systèmes ouverts avec un écoulement moyen non nul : les écoulements de Poiseuille, les écoulements cisailés des couches de mélange, ou

encore, comme nous l'avons vu au Section 4.2.4, les écoulements de PRB. Pour étudier la stabilité de tels écoulements, la *croissance temporelle et spatiale* des perturbations doit être prise en compte, ce qui fait apparaître les concepts d'*instabilités convective et absolue*. Ces concepts, définis dans le cadre de la physique des plasmas, ont été introduits par Huerre et Monkewitz (1985) [89] dans le cadre des instabilités hydrodynamiques, pour des écoulements de couche de mélange. Le principe de base qui permet de définir l'instabilité absolue ou l'instabilité convective consiste à étudier la réponse d'un écoulement soumis à une perturbation impulsionale unique. Mathématiquement, cela consiste à introduire une fonction de Dirac dans les termes de source des équations de perturbations linéarisées, à calculer la fonction de Green et à regarder son comportement aux temps longs. On trouvera la formulation mathématique, ainsi que la définition des critères de transition entre les zones de stabilité, d'instabilité convective et d'instabilité absolue dans Huerre et Monkewitz (1990) [90].

Sans perdre en généralité, nous représentons sur la Fig. 14 les réponses possibles des écoulements de PRB 2D perturbés par une impulsion. Le graphe donne les courbes de transition, dans le plan Ra – Re , entre les zones où l'écoulement de Poiseuille est linéairement stable et celles où il apparaît des R_{\perp} convectivement ou absolument instables. Pour chacune des zones, on montre l'évolution spatio-temporelle d'une perturbation impulsionale localisée en $x = x_0$ à l'instant $t = t_0$. L'écoulement est *linéairement stable* pour $Ra < Ra_{\perp}^*(Re)$: l'amplitude de la perturbation tend à s'annuler partout dans la conduite pour des temps suffisamment longs. Pour $Ra > Ra_{\perp}^*(Re)$, l'écoulement est linéairement instable. Il est *convectivement instable* pour $Ra_{\perp}^*(Re) < Ra < Ra_{\perp}^{\text{conv}}(Re)$: quel que soit t , les fronts amont et aval de la perturbation se propagent dans le sens de l'écoulement moyen, dirigé ici selon les x croissants. Il existe un système

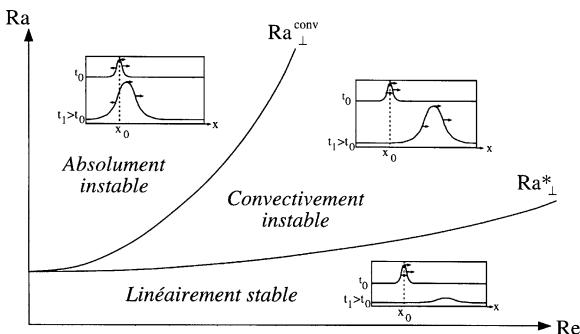


Fig. 14. Évolution spatiale et temporelle d'une perturbation impulsionale dans le cas d'écoulements linéairement stables, convectivement instables et absolument instables et représentation des courbes de transition Ra_{\perp}^* et Ra_{\perp}^{conv} entre ces différents types d'instabilités dans le cas des écoulements de PRB 2D.

Fig. 14. Temporal and spatial impulse response of linearly stable, convectively unstable and absolutely unstable flows, and transition curves Ra_{\perp}^* and $Ra_{\perp}^{\text{conv}}(Re)$ between these different types of instabilities in the case of the 2D PRB flows.

de référence en mouvement, attaché au déplacement de la perturbation, dans lequel l'amplitude de cette dernière ne cesse de croître dans le temps. Par contre, pour des temps suffisamment longs, l'amplitude de la perturbation décroît pour tout x donné. La perturbation est évacuée de la conduite et l'écoulement retourne à sa position d'équilibre. Pour $Ra > Ra_{\perp}^{\text{conv}}(Re)$, l'écoulement est absolument instable : les fronts de la perturbation se propagent vers l'amont et vers l'aval. A cause des non-linéarités, l'amplitude croît jusqu'à saturation en toute position x de la conduite, lorsque t tend vers l'infini.

Les écoulements absolument et convectivement instables présentent des comportements très différents lorsqu'ils sont soumis à des perturbations extérieures. Dans le cas des écoulements absolument instables, une perturbation unique suffit à produire asymptotiquement une structure cohérente (l'apparition des R_{\perp} par exemple). Seules certaines fréquences, les modes « naturels » de l'écoulement, sont amplifiées. Ces écoulements sont très peu sensibles à un forçage extérieur. Dans le cas où l'écoulement de PRB prend la forme de R_{\perp} , Müller et al. (1992) [68,91] montrent numériquement que les modes naturellement amplifiés sont très peu perturbés par la présence d'un bruit blanc à l'entrée (cf. Section 5.4). Dans le cas des écoulements convectivement instables, une perturbation unique ne suffit pas pour déstabiliser l'écoulement de base. Pour voir apparaître un motif convectif, il faut perturber en permanence l'écoulement. Par exemple, le bruit inhérent aux manipulations expérimentales peut suffire si le canal est assez long pour permettre une amplification suffisante des perturbations. Les écoulements convectivement instables sont très sensibles à un forçage extérieur car ce sont des amplificateurs de bruit. A priori, n'importe quel mode de la perturbation est susceptible d'être amplifié. L'écoulement résultant du forçage peut être vu comme la somme d'ondes de différentes fréquences, spatialement amplifiées et évoluant dans le sens de l'écoulement. Chomaz

et al. (1988) [92] expliquent que pour ces écoulements le spectre de fréquence est en général un « spectre bande » car les phénomènes d'auto-entretien des oscillations ou de résonance n'y sont pas possibles. Deissler (1987, 1989) [93, 94] montre aussi ce résultat en utilisant une équation de Ginzburg–Landau comme modèle d'écoulement convectivement instable (à condition de se placer suffisamment loin en aval de la source des perturbations localisées). Cependant, dès qu'un écoulement convectivement instable subit un forçage extérieur cohérent (présence d'un obstacle dans l'écoulement, influence des conditions aux limites aux frontières ouvertes lors de simulations numériques), des fréquences particulières sont amplifiées. Ce phénomène a principalement été étudié dans le cas du développement des instabilités de Kelvin–Helmholtz (cf. Chomaz et al. (1988) [92], Astruc (1993) [95] et Buell et Huerre (1988) [96]).

5.2. A propos des équations d'amplitude et de l'équation de Ginzburg–Landau

Les équations qui décrivent les systèmes physiques peuvent être très compliquées et difficiles à étudier (l'équation de Navier–Stokes par exemple). Grâce à des approximations adéquates, il est souvent possible de se ramener à un jeu d'équations simplifiées conservant les propriétés essentielles des phénomènes que l'on souhaite étudier. Les équations d'amplitude constituent de telles équations réduites. Ce sont des équations *monodimensionnelles* qui traduisent la dynamique *linéaire ou faiblement non-linéaire* de systèmes physiques. C'est-à-dire que ce sont des modèles simples qui permettent d'étudier l'évolution d'une instabilité au voisinage du point de bifurcation déterminé par la stabilité linéaire.

Lors de la présentation des études de stabilité linéaire à la Section 4, nous avons vu qu'une perturbation infinitésimale de l'état de base dans l'écoulement de PRB 2D peut s'écrire sous la forme $f(x, z, t) = \hat{f}(z) \cdot e^{i(k_x x + \sigma_i t)}$ (où $f = U, W, P$ ou T). Au-delà du seuil d'instabilité, mais dans son voisinage, l'influence des non-linéarités reste faible. En supposant que les variations temporelles et éventuellement spatiales des variables $f(x, z, t)$ sont lentes, la solution du problème faiblement non-linéaire peut alors être recherchée sous la forme :

$$f(x, z, t) = A(x, t) \hat{f}(z) \cdot e^{i(k_x x + \sigma_i t)} \quad (4)$$

où $A(x, t)$ désigne une amplitude lentement modulée en espace et en temps et où $\hat{f}(z)$ est la fonction propre, associée à la valeur propre du mode le plus instable déterminé par la théorie linéaire. Les équations d'amplitude se proposent précisément de décrire les modulations spatio-temporelles de $A(x, t)$. On trouvera une description complète de la méthode permettant d'établir ces équations dans Thual (1987) [97] ou dans Barthelet (1995) [98]. Newell et al. (1993) [99] proposent, quant à eux, une revue complète des différentes équations d'amplitude et de leur champ d'application.

L'équation de Ginzburg–Landau est un type particulier d'équation d'amplitude. C'est une équation aux dérivées

partielles qui s'écrit :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + v_g \frac{\partial A}{\partial x} = aA + b \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - c|A|^2 A \quad (5)$$

Dans le cas général, l'amplitude $A = A(x, t)$ est une fonction complexe et a, b et c sont des coefficients complexes, où la partie réelle b_r de b est positive. $v_g = (\partial \sigma_i / \partial k_x)^*$ est la vitesse de groupe du mode le plus instable au point de bifurcation déterminé par la stabilité linéaire temporelle. $a = a_r + ia_i$ est le taux de croissance temporelle de A considérée comme une fonction de t uniquement. Le terme en dérivée seconde de x permet de traduire, par exemple, la modulation de l'amplitude causée par l'influence des conditions aux limites dans le système étudié. Le terme non-linéaire cubique permet quant à lui de prendre en compte la saturation de l'amplitude. L'équation (5) est donc un modèle très simple qui permet d'analyser la dynamique faiblement non-linéaire des écoulements dans de très nombreux problèmes (cf. Huerre et Monkewitz (1990) [90] et Newell et al. (1983) [99]). Huerre et Monkewitz (1990) [90] signalent que l'équation de Ginzburg–Landau linéarisée (sans le terme cubique) est le modèle le plus simple permettant de donner naissance à des instabilités absolues et convectives. Deissler (1987) [93] traduit ces critères d'instabilité pour l'équation (5) linéarisée. Il montre que l'écoulement de base ($A = 0$) est :

– absolument stable si

$$a_r < 0 \quad (6)$$

– absolument instable si

$$a_r - v_g^2 b_r / (4|b|^2) > 0 \quad (7)$$

– et convectivement instable si

$$0 < a_r < v_g^2 b_r / (4|b|^2) \quad (8)$$

5.3. Instabilités convectives et absolues des R_\perp et des $R_{//}$

Les premiers à avoir étudié la stabilité convective et absolue des R_\perp 2D sont Müller et al. (1989) [78] à partir d'une équation de Ginzburg–Landau établie rigoureusement en partant des équations de conservation complètes. Parallèlement, afin de valider et de comparer les résultats de leur équation-modèle 1D, Müller et al. ont effectué des simulations numériques directes 2D. Tous les résultats sont obtenus à $Pr = 1$, $Re < 7$, et pour $Ra < 2500$ afin de rester dans le domaine faiblement non-linéaire. L'ensemble de cette étude se trouve dans la thèse de Müller (1990) [67] et est publié dans sa quasi-intégralité dans Müller et al. (1992) [68]. L'article de Müller et al. (1989) [78] résume plus particulièrement les résultats obtenus à partir de l'équation de Ginzburg–Landau et Müller et al. (1992) [91] insistent davantage sur les simulations numériques directes 2D. L'équation de Ginzburg–Landau établie par Müller et al. s'écrit :

$$\begin{aligned} \tau_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_g \frac{\partial}{\partial x} \right) A \\ = \left[\mu (1 + ic_0) + \xi_0^2 (1 + ic_1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \gamma (1 + ic_2) |A|^2 \right] A \end{aligned} \quad (9)$$

où $\mu = (Ra - Ra_\perp^*) / Ra_\perp^*$ est la distance réduite entre le nombre de Rayleigh courant Ra et le nombre de Rayleigh critique au seuil Ra_\perp^* (Re, Pr). Tous les autres paramètres de l'équation (9) sont aussi fonction de Pr et de Re . Pour chacun d'eux, Müller calcule des développements en puissances de Re . τ_0, ξ_0^2 et γ s'écrivent par des développements en puissances paires de Re , et v_g, c_0, c_1 et c_2 par des développements en puissances impaires de Re . Pour Re suffisamment petit, les termes d'ordre élevé peuvent être négligés. Les expressions de ces coefficients pour $Pr = 1, 5,8$ et $6,4$ sont données dans le Tableau 4.

En se servant des critères d'instabilités convective et absolue de Deissler (1987) [93] (cf. équations (6)–(8)), Müller et al. (1989, 1992) [68,78] montrent que la courbe de séparation entre les régions de R_\perp absolument et convectivement instables est définie par

$$\mu = \frac{v_g^2 \tau_0^2}{4\xi_0^2 (1 + c_1^2)} = \mu_\perp^{\text{conv}}$$

ce qui se traduit en terme de nombre de Rayleigh par :

$$Ra_\perp^{\text{conv}} = Ra_\perp^* (1 + \mu_\perp^{\text{conv}}) \quad (10)$$

Cette courbe est dessinée pour $Pr = 6,4$ sur la Fig. 10. Comme nous l'avons déjà observé, elle se compare favorablement avec les résultats expérimentaux de Ouazzani et al. (1990, 1993) [32,100]. Pour la suite, on retiendra que l'équation (10) et tous les résultats issus de l'équation (9) ne sont précis qu'à petits nombres de Rayleigh et de Péclet (pour $Ra < 2500$ et $Pe < 6$ environ).

Récemment, Carrière et Monkewitz (1999) [69] ont aussi mené une étude des instabilités convectives et absolues dans les écoulements de PRB en analysant, à partir du calcul de la fonction de Green, la réponse linéaire aux temps longs de l'écoulement de PRB circulant entre deux plaques d'extensions infinies et soumis à une perturbation impulsionale. Autrement dit, ils se sont intéressés à l'évolution asymptotique du paquet d'onde provoqué par la perturbation. Dans cette analyse, aucune restriction sur la direction de propagation des ondes, sur l'orientation des rouleaux ($R_{//}, R_\perp, R_{\text{obliques}}$) et sur la valeur des paramètres de l'écoulement (notamment Re) n'est introduite. Pour $Pr = 0,71, 6,4, 7$ et 450 , ils tracent dans le plan Ra – Re les courbes de transition $Ra_\perp^{\text{conv}}(Re)$ issues de leur analyse. Ils montrent que leur courbe $Ra_\perp^{\text{conv}}(Re)$ à $Pr = 6,4$ se situe légèrement en dessous de la courbe équivalente calculée à partir de l'équation (10) et des coefficients du Tableau 4 (et ce d'autant plus que Re augmente), mais qu'elle coïncide parfaitement avec les résultats de simulations numériques directes 2D de Nicolas et al. (1997) [101].

Ces derniers calculent le développement des écoulements de R_\perp dans des conduites 2D de longueur finie (allongement $A = 10$ ou 20), sans qu'aucun forçage ne soit imposé

Tableau 4

Coefficients à $Pr = 1, 5,8$ et $6,4$ de l'équation de Ginzburg–Landau établie par Müller (1990) [67] et Müller et al. (1992) [68] pour des écoulements de R_{\perp} 2D (voir aussi Müller et al. (1993) [104] et Ouazzani (1991) [134])

Table 4

Coefficients at $Pr = 1, 5.8$ and 6.4 of the Ginzburg–Landau equation established by Müller (1990) [67] and Müller et al. (1992) [68] for the 2D R_{\perp} flows (see also Müller et al. (1993) [104] and Ouazzani (1991) [134])

	$Pr = 1$	$Pr = 5,8$	$Pr = 6,4$
τ_0	$0,07693 - 5 \times 10^{-5} Re^2 + O(Re^4)$	$0,0554 + 7 \times 10^{-5} Re^2 + O(Re^4)$	$0,05496 + O(Re^2)$
ξ_0^2	$0,148 - 12 \times 10^{-5} Re^2 + O(Re^4)$	$0,1482 + 0,00116 Re^2 + O(Re^4)$	$0,148 + O(Re^2)$
γ	$0,7027 - 6 \times 10^{-6} Re^2 + O(Re^4)$	non fourni	$0,699 + O(Re^2)$
c_0	$0,00714 Re + O(Re^3)$	$0,0187 Re + O(Re^3)$	$0,0183 Re + O(Re^3)$
c_1	$0,02501 Re + O(Re^3)$	$0,0382 Re + O(Re^3)$	$0,0199 Re + O(Re^3)$
c_2	$0,00258 Re + O(Re^3)$	$-0,0030 Re + O(Re^3)$	$-0,0066 Re + O(Re^3)$
v_g	$1,229 Re + O(Re^3)$	$7,507 Re + O(Re^3)$	$8,301 Re + O(Re^3)$

à l'écoulement. Un profil de Poiseuille purement conductif est imposé à l'entrée du domaine de calcul et une condition de sortie de type Orlanski (cf. Section 7.1) est utilisée à la sortie. En fonction des valeurs de Ra et de Re , les solutions obtenues sont soit des écoulements de Poiseuille, soit des écoulements de R_{\perp} . La limite entre la zone où naissent des structures thermoconvectives auto-excitées (les R_{\perp}) et la zone où il n'y en a pas (écoulement de Poiseuille) donne avec une bonne précision la limite Ra_{\perp}^{conv} entre les zones d'instabilités convectives et absolues pour les R_{\perp} . Cependant, la méthode la plus précise pour déterminer la courbe de transition $Ra_{\perp}^{\text{conv}}(Re)$ dans de telles simulations numériques directes consiste à calculer les couples (Ra, Re) pour lesquels la longueur d'établissement l_e des R_{\perp} diverge. Cette méthode sera décrite à la Section 6.3.2. On notera que lorsqu'on simule les écoulements de PRB en utilisant des conditions aux limites périodiques, il n'est plus possible de retrouver la courbe $Ra_{\perp}^{\text{conv}}(Re)$ puisque toutes les perturbations qui sortent du domaine de calcul sont immédiatement réinjectées à l'entrée. En accord avec ce qui a été dit à la Section 5.1 au sujet du comportement des écoulements convectivement instables perturbés en permanence, Nicolas (1997) [102] vérifie qu'avec des conditions aux limites périodiques, la courbe de transition entre écoulements de Poiseuille et R_{\perp} correspond exactement à la courbe théorique Ra_{\perp}^* .

Le résultat original et important obtenu par Carrière et Monkewitz (1999) [69] concerne les R_{\parallel} . Ils montrent en effet que les R_{\parallel} ne sont jamais absolument instables lorsque $Re > 0$. Autrement dit, dans des écoulements de PRB en conduite d'allongement transversal infini, le seul mode absolument instable correspond aux R_{\perp} . Ce résultat est en contradiction avec les travaux de Brand et al. (1991) [103], Müller et al. (1993) [104], Tveitereid et Müller (1994) [105] et Li et al. (1997) [106] qui utilisent des modèles basés sur deux équations d'amplitude couplées, l'une traduisant le développement des R_{\perp} et l'autre celui des R_{\parallel} . En effet, ces études prédisent une transition convective-absolue à la fois pour les R_{\perp} et pour les R_{\parallel} . Carrière et Monkewitz (1999) [69] montrent que les résultats de ces auteurs concernant l'instabilité absolue des R_{\parallel} sont erronés à cause d'une utilisation des équations d'amplitude en dehors de

leur domaine de validité (hypothèse de variation lente de l'amplitude des rouleaux non vérifiée ; cf. Section 5.2). Le deuxième résultat important obtenu par Carrière et Monkewitz (1999) [69] avec la même analyse est qu'aux temps longs, pour $Ra_{\parallel}^* = 1708 < Ra < Ra_{\perp}^{\text{conv}}$, le mode le plus amplifié se situant au centre du paquet d'ondes correspond à l'apparition de R_{\parallel} . Ainsi, tant que l'écoulement est convectivement instable et que l'allongement transversal de la conduite est suffisamment grand, en supposant que le niveau de bruit en entrée de conduite soit suffisamment élevé (ce qui doit être le cas dans les expériences de laboratoire), on devrait observer des R_{\parallel} plus ou moins loin en aval de l'entrée. Ce résultat, obtenu avec une théorie linéaire, nécessiterait d'être confirmé expérimentalement dans des conduites de grandes extensions longitudinale et transversale. Seules les expériences de Fukui et al. (1983) [107] dans l'air, réalisées avec une conduite d'allongement $B = 19,5$, pour une gamme de Ra et de Re où l'instabilité est convective selon Carrière et Monkewitz, semblent abonder en ce sens.

Pour résumer, nous avons vu jusqu'ici, dans le cas d'écoulements de PRB entre deux plaques infinies, que les théories linéaires permettent de déterminer $Ra_{\perp}^*(Re, Pr)$ (cf. équation (1)), $Ra_{\parallel}^* (= 1708)$ et $Ra_{\perp}^{\text{conv}}(Re, Pr)$ (cf. équation (10)) et que $Ra_{\parallel}^{\text{conv}}$ n'existe pas. Dans le cas de conduites d'allongement transversal fini, elles permettent d'obtenir $Ra_{\parallel}^*(B)$ (cf. Fig. 8) et $Ra_{\perp}^*(Re, Pr, B)$ (cf. Fig. 9). Par contre, aucune théorie n'a encore été développée dans ce cas pour calculer Ra_{\perp}^{conv} et éventuellement $Ra_{\parallel}^{\text{conv}}$. Cela paraît pourtant nécessaire puisque Ra_{\perp}^* ne traduit pas les observations expérimentales pour $B < \infty$ dès lors que l'écoulement n'est pas perturbé par un bruit permanent. D'autre part, il est étonnant de constater (cf. Tableau 3) que le seuil théorique $Ra_{\parallel}^*(B)$ s'accorde bien avec les seuils de transition déterminés par les expériences de laboratoire et les simulations numériques, alors qu'aucune perturbation particulière, semble-t-il, n'est introduite dans ces écoulements. Cela nous amène à poser la question suivante : quel mécanisme peut expliquer, dans ces expériences, l'apparition de R_{\parallel} non loin de la zone d'entrée et pour Ra proche de Ra_{\parallel}^* si on considère, comme dans le cas des écoulements entre deux plaques infinies, que les R_{\parallel} sont uniquement convectifs.

tivement instables ? Des analyses théoriques et expérimentales complémentaires seraient nécessaires pour répondre. Nous proposons malgré tout quelques hypothèses. La première est issue des constatations bibliographiques suivantes. Dans de nombreuses études récentes, numériques [12,13,18, 19,81] (cf. Tableau 1) et expérimentales [82,83], mais aussi dans l'analyse linéaire de Cheng et Wu (1976) [80] (cf. Section 4.3 et Fig. 11), il ressort que, dans la zone d'entrée sur la plaque chauffée, les R_{\perp} sont plus instables que les R_{\parallel} et qu'il peut exister un ou plusieurs R_{\perp} fixes ou en mouvement en amont d'un écoulement de R_{\parallel} pleinement établi. Il se peut donc que les structures transversales présentes à l'entrée soient la cause des perturbations qui provoquent la formation des R_{\parallel} en aval. Autrement dit, les R_{\perp} seraient localement absolument instables à l'entrée et convectivement instables vers l'aval. Cependant, comme d'après Carrière et Monkewitz (1999) [69], le mode le plus amplifié aux temps longs correspond aux R_{\parallel} , les R_{\perp} qui apparaissent à l'entrée laisseraient la place aux R_{\parallel} convectivement instables dès lors que $Ra_{\parallel}^* < Ra_{\perp}^{\text{conv}}$. La deuxième hypothèse est issue de la constatation que, dans les expériences et dans les simulations numériques en canal confiné, les R_{\parallel} naissent toujours par paires à partir des parois verticales et envahissent progressivement le canal vers l'aval (cf. références [72–75, 81] et Section 4.2.4). Il se pourrait que la présence des parois verticales modifie la nature de l'instabilité (que les R_{\parallel} deviennent absolument instables dans ce cas) ou bien favorise l'apparition de perturbations entretenues provoquant la naissance de R_{\parallel} convectivement instables (par exemple, par l'apparition d'un bruit thermique causé par la présence de gradients horizontaux résiduels entre les plaques horizontales et verticales).

5.4. Influence d'un bruit blanc sur des écoulements de R_{\perp} convectivement instables

Les conditions d'entrée et de sortie utilisées généralement dans les simulations numériques directes d'écoulements de PRB 2D sont de type « profils de vitesse et de température constants » ou « gradients de vitesse et de température constants ». Elles empêchent donc l'entrée de toute perturbation dans le domaine de calcul. D'après ce qui a été dit à la Section 5.1, et qui est vérifié numériquement par Müller et al. (1992) [68,91] et Nicolas et al. (1997) [101], la formation des R_{\perp} n'est donc pas possible dès que l'on pénètre dans la région d'instabilité convective : $Ra_{\perp}^*(Re) < Ra < Ra_{\perp}^{\text{conv}}(Re)$ pour Re donné. Pour étudier l'influence des perturbations dans cette région, Müller (1990) [67] et Müller et al. (1992) [68,91] superposent un bruit blanc (une vitesse verticale fluctuante) au profil de Poiseuille purement conductif imposé à l'entrée du domaine de calcul, en utilisant une suite de nombres aléatoires non-correlés de moyenne nulle. Pour Ra et Re fixés, trois simulations sont effectuées, telles que l'amplitude du bruit blanc à l'entrée soit égale à 1 %, 10 % et 100 % de l'amplitude de saturation W_s de l'écoulement aval. Dans le cas où les simulations

numériques directes sont effectuées dans la région absolument instable, Müller montre que les écoulements de R_{\perp} sont à peine perturbés par le bruit blanc : seules, des petites variations dans l'enveloppe $W_{\max}(x)$ de la composante de vitesse verticale maximale en reflètent la présence sur une courte distance à l'entrée de la conduite. Plus loin en aval, les R_{\perp} se comportent comme dans le cas non perturbé. Par contre, lorsqu'on se trouve dans la région convectivement instable, la réponse de l'écoulement est très différente. La Fig. 15 reproduit le résultat de simulations numériques pour un écoulement convectivement instable. Elle montre l'évolution axiale de $W(x, z = 0,5)$ pour les trois intensités de bruit à l'entrée. Après une phase d'amplification linéaire pendant laquelle seuls certains modes sont sélectionnés, la phase d'amplification non-linéaire de ces modes permet la formation de R_{\perp} qui se propagent vers l'aval (cf. Deissler (1987) [93]). Cependant, Müller observe que les enveloppes $W_{\max}(x)$ des R_{\perp} ne sont plus stationnaires mais fluctuent légèrement autour d'un profil moyen. La moyenne temporelle de la longueur d'établissement l_e des R_{\perp} décroît de manière monotone lorsque l'intensité du bruit augmente. Si la source des perturbations est arrêtée, les cellules convectives disparaissent : elles sont évacuées du domaine de calcul.

Müller retrouve la même dynamique des écoulements soumis à un bruit blanc avec son équation d'amplitude. Dans la région près de l'entrée, dans la phase d'amplification linéaire des perturbations, l'équation de Ginzburg–Landau linéarisée permet de démontrer que l'amplitude du mode le plus amplifié est égale à $A_0 e^{\kappa x}$, où A_0 est l'amplitude du bruit blanc à l'entrée, et où κ est le taux de croissance spatial maximum qui est constant pour Ra et Re fixés. On retrouve ce résultat avec les simulations numériques de la Fig. 15 : la ligne droite en pointillés relie les positions axiales où la vitesse verticale a une même (petite) amplitude qui résulte d'un bruit dont l'intensité A_0 croît linéairement sur une échelle logarithmique lorsqu'on passe du graphe (a) au graphe (c). La longueur de la zone d'amplification linéaire décroît linéairement en fonction de $\log(A_0)$.

Très récemment, de nombreux auteurs ont analysé, par des approches théoriques, l'influence de diverses sources de perturbations sur différentes configurations d'écoulements convectivement instables. Ces études ont pour ambition d'essayer de comprendre si c'est le bruit thermique interne à l'ensemble du système qui déclenche et entretient les structures thermoconvectives observées expérimentalement dans les régimes d'écoulements convectivement instables ou si c'est une autre source de perturbations, d'origine externe au système, qui pourraient, par exemple, être advectées dans le système depuis l'entrée. Les théories développées pour ces analyses étant relativement complexes (utilisant notamment l'équation de Ginzburg–Landau stochastique), nous renvoyons à Lücke et Szprynger (1997) [108] et à Jung et al. (2001) [109] pour avoir plus de détails sur ces analyses et une bibliographie plus complète sur le sujet. Notons que ces deux articles traitent de la configuration des écoulements de PRB.

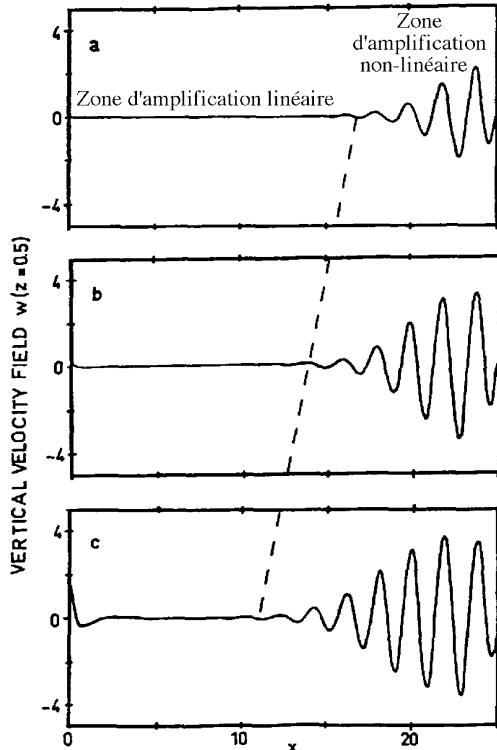


Fig. 15. Variation axiale de la composante verticale de la vitesse W en $z = 0.5$, dans un écoulement convectivement instable de R_\perp ($Re = 3$, $\varepsilon = 0.114$, $Pr = 1$), soumis à un bruit blanc en $x = 0$, dont l'amplitude est égale à 1 % (a), 10 % (b) et 100 % (c) de l'amplitude de saturation W_s . La ligne droite pointillée relie les positions où l'amplitude de $W(x; z = 0.5)$ prend la même valeur (tiré de Müller et al. (1992) [68]).

Fig. 15. Axial variation of the vertical velocity component W at $z = 0.5$, in a convectively unstable flow of R_\perp ($Re = 3$, $\varepsilon = 0.114$, $Pr = 1$), submitted to a white noise at $x = 0$, whose amplitude equals 1 % (a), 10 % (b) and 100 % (c) of the saturation amplitude W_s . The straight dashed line links the positions of equal vertical velocity amplitudes (extracted from [68] H.W. Müller, M. Lücke, M. Kamps, Physical Review A 45 (1992) 3714–3725. Copyright 1992 by the American Physical Society).

6. Transferts thermiques et longueurs d'établissement des structures thermoconvectives (1966–2001)

6.1. Transferts thermiques dans la zone d'entrée

Nous faisons tout d'abord quelques remarques qui seront valables tant que rien d'autre n'aura été mentionné explicitement. Les travaux cités dans ce paragraphe concernent la variation axiale du nombre de Nusselt dans la zone d'entrée thermique d'écoulements thermoconvectifs laminaires de type PRB. L'écoulement qui arrive sur la plaque chauffée est supposé dynamiquement établi. La plupart des travaux se situent à grands nombres de Reynolds ($50 < Re < 1000$) et donc en phase de $R_{\parallel\parallel}$. Parmi ces études, celles qui utilisent la simulation numérique directe négligent la diffusion axiale et résolvent des équations paraboliques. Tous les résultats présentés se rapportent à des nombres de Nusselt moyennés dans la direction transversale du canal et ils sont calculés sur la plaque inférieure chauffée à flux constant. Enfin, signalons que, dans les travaux expérimentaux, la me-

sure du nombre de Nusselt n'est pas aisée : elle nécessite beaucoup de précautions pour évaluer correctement les flux de chaleur échangés par conduction, convection et rayonnement dans le système. Nous renvoyons le lecteur aux articles d'Ostrach et Kamotani (1975) [58], de Maughan et Incropera (1987) [110] et de Lin et Lin (1996) [111] pour plus de précisions.

Les premiers à avoir mesuré expérimentalement les transferts thermiques dans la zone d'entrée des écoulements de PRB sont Kamotani et Ostrach (1976) [84] et Kamotani et al. (1979) [85] pour des écoulements d'air (cf. Section 4.3). Les mesures de Nu sont relativement imprécises puisque les auteurs signalent des incertitudes de l'ordre de 12 %. Plus récemment, un travail intensif sur le sujet a été effectué par Incropera et ses coauteurs [110,112–115] pour des conduites d'allongement transversal $2 \leq B \leq 20$, dans le cas où les parois, autres que la plaque chauffée du bas, sont adiabatiques. Incropera et al. (1987) [112], expérimentalement, et Mahaney et al. (1987, 1988) [113,114], par simulations numériques 3D, étudient le cas d'écoulements d'eau, alors que Maughan et Incropera (1987, 1990) [110,115], expérimentalement et par simulations numériques 2D, étudient le cas d'écoulements d'air. Nonino et Del Giudice (1991) [116] calculent numériquement la variation axiale des nombres de Nusselt pariétaux pour un canal d'allongement $B = 2$, pour $Pr = 6,5$ et pour plusieurs combinaisons de conditions aux limites thermiques (conditions de température ou de flux imposés, de conduction ou de convection sur les quatre parois du canal). Narusawa (1993) [72] propose une étude numérique 3D à $B = 10$ et $Pr = 0,71$ dont le but est de retrouver, à partir de l'évolution axiale de Nu et en jouant sur le type de conditions aux limites thermiques, les différentes longueurs d'établissement déterminées par anémométrie laser-Doppler par Chiu et Rosenberger (1987) [117] dans des écoulements de PRB dans l'azote (cf. Section 6.3.1). Narusawa (1998) [118] reprend cette étude numérique pour étudier l'influence du rapport d'allongement transversal B sur Nu et sur les longueurs d'établissement des $R_{\parallel\parallel}$ lorsque $2 \leq B \leq 6$. Très récemment, Lin et Lin (1996) [111,119], Gau et al. (1999) [120] et Tseng et al. (2000) [121] ont effectué des mesures expérimentales de Nu dans l'air. Lin et Lin (1996) [111,119] ont étudié les écoulements dans une conduite rectangulaire d'allongement $B = 4$, d'axe horizontal ou incliné par rapport à l'horizontale, dans le cas où se développent des $R_{\parallel\parallel}$ stationnaires, périodiques, voire chaotiques (cf. Section 8.3). En vue d'applications possibles en CVD, Gau et al. (1999) [120] et Tseng et al. (2000) [121] ont étudié le cas d'écoulements dans des conduites horizontales à plans parallèles ou très légèrement convergents. Notons que toutes les études expérimentales citées ci-dessus et postérieures à 1987 (Incropera et al. (1987) [112] inclus) proposent, parallèlement à la mesure de $Nu = f(x)$, des visualisations par plans lumineux des structures thermoconvectives qui se développent dans la zone d'entrée.

Le résultat qualitatif principal, commun à l'ensemble de ces travaux, est résumé à la Fig. 16. Il donne l'évolution de

Nu en fonction de $x/(Pe D_h)$. Dans ce graphe, la courbe en trait discontinu correspondant au cas de l'écoulement forcé, on peut distinguer trois régions lors de l'apparition du régime thermoconvectif : (1) la région d'écoulement forcé, (2) celle où la convection mixte se développe (la courbe $Nu = f(x)$ continue à diminuer, puis augmente brutalement, l'augmentation étant éventuellement suivie d'oscillations amorties), et (3) celle où le régime thermoconvectif est parfaitement établi ($Nu = f(x)$ garde une valeur constante). Toutes les études citées ci-dessus montrent que la longueur de la région (1) augmente lorsque Re augmente ou Gr diminue. Dans la région (2), les oscillations qui suivent la brutale augmentation de Nu ont une amplitude et un taux de décroissance qui varient d'une étude à l'autre. Ces oscillations sont en général de grandes amplitudes et relativement peu amorties dans le cas de petits rapports de forme ($B \leq 4$) et de nombres de Rayleigh élevés ($Ra > 8000$) (voir, par exemple, Narusawa (1998) [118], Lin et Lin (1996) [111] et Maughan et Incropera (1990) [115] où la valeur maximale de Nu dans la zone (2) est supérieure d'environ 25 % à la valeur de Nu de la zone (3)). Parfois, dans les cas contraires, aucune oscillation n'est observée (cf. Kamotani et Ostrach (1976) [84], Kamotani et al. (1979) [85] et Narusawa (1993) [72]). Il est singulier de constater qu'aucune visualisation expérimentale ou numérique du développement des instabilités dans la zone d'entrée permette d'expliquer le comportement oscillatoire du transfert thermique. Maughan et Incropera (1990) [115] et Lin et Lin (1996) [111] proposent des lois de corrélation, en fonction de Pe et du nombre de Rayleigh modifié Ra' (cf. nomenclature), pour la position x_1 de la fin de la zone (1) (ou du début de la zone (2)) :

$$Ra' = 1620(x_1/Pe)^{-1,34} \quad [115] \quad (11)$$

$$Ra' = 1330(x_1/Pe)^{-1,34} \quad [111] \quad (12)$$

et pour la position x_2 de la valeur maximale de Nu dans la zone (2) :

$$Ra' = 1950(x_2/Pe)^{-1,95} \quad [115] \quad (13)$$

Narusawa (2001) [77] réalise une analyse théorique utilisant le second principe de la thermodynamique et des simulations numériques 3D d'écoulements de $R_{//}$ dans l'azote, à $Re \approx 50$, $2500 \leq Ra \leq 5000$ et $2,2 \leq B \leq 3,5$. Il montre que la courbe donnant la variation en fonction de $x/(Pe D_h)$ du taux de production d'entropie volumique lié aux dissipations thermiques ($\kappa/T^2((\partial T/\partial x)^2 + (\partial T/\partial y)^2 + (\partial T/\partial z)^2)$) et intégré sur la section transversale du canal est semblable à la courbe donnant Nu en fonction de $x/(Pe D_h)$. Ajoutons que ces deux courbes ont un comportement concordant avec la Fig. 16. Narusawa (2001) [77] montre aussi théoriquement que, dans le cas d'écoulements de $R_{//}$ parfaitement établis, le taux de production d'entropie introduit ci-dessus est proportionnel au nombre de Nusselt.

Il semble que seuls Evans et Greif (1989, 1991) [6,7] (cf. Tableau 1) aient publié des résultats sur les variations axiales et transversales de Nu dans la zone d'entrée thermique

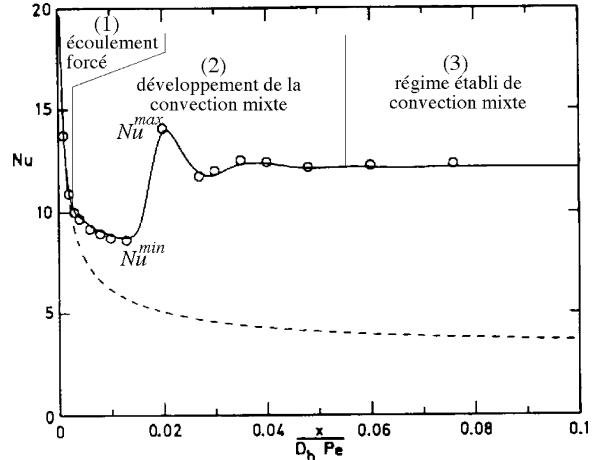


Fig. 16. Évolution axiale du nombre de Nusselt moyen dans la direction transversale pour un écoulement de $R_{//} \approx Ra = 1,56 \times 10^4$, $Re = 250$, $Pr = 6,5$ et $B = 2$ (--- : écoulement forcé; ○ : Mahaney et al. (1988) [114]; — : Nonino et Del Giudice (1991) [116]) (tiré de [116]).

Fig. 16. Axial evolution of the time and spanwise average Nusselt number for a $R_{//}$ flow at $Ra = 1.56 \times 10^4$, $Re = 250$, $Pr = 6.5$ and $B = 2$ (---: forced flow; ○: Mahaney et al. (1988) [114]; —: Nonino and Del Giudice (1991) [116]) (extracted from [116]). © 1991, John Wiley and Sons Limited. Reproduced with permission.

lorsque Re est très petit et qu'il apparaît des R_{\perp} . Dans leurs simulations numériques 2D et 3D, ils s'intéressent à un écoulement de Poiseuille purement conductif qui pénètre dans un canal chauffé uniformément par le bas et refroidi uniformément par le haut. Ils montrent que l'écoulement reste parallèle ($Nu = 1$) sur une distance qui s'allonge si Ra diminue ou si Re augmente. A l'apparition des R_{\perp} , le nombre de Nusselt oscille sinusoïdalement et augmente en moyenne. Lorsque l'écoulement de R_{\perp} est complètement établi, le nombre de Nusselt moyen en temps reste constant.

Evans et Greif (1991, 1993) [7,21] déterminent aussi les variations spatiales de Nu lorsque l'écoulement de PRB est en phase de $R_{//}$ ou lorsque des structures plus complexes apparaissent (superposition de R_{\perp} et de $R_{//}$). D'une manière générale, de nombreux travaux numériques 3D récents, ont mis en évidence de telles structures complexes dans l'entrée des conduites chauffées. Dans de nombreux cas, pour visualiser ces structures, des nappes 3D donnant la valeur du nombre de Nusselt local en chaque point des parois horizontales sont dessinées. Cette technique est notamment utilisée par Mahaney et al. (1987) [113], Evans et Greif (1993) [21], et par Lin et ses coauteurs : Huang et Lin (1994, 1995, 1996) [122–124], Lin et al. (1996) [125], Lin et Lin (1997) [126], Chang et al. (1997) [127], Yu et al. (1997) [73, 128], Yu et Lin (1997) [129]. Nous reviendrons sur toutes ces études et sur l'analyse des structures thermoconvectives complexes à la Section 8.

6.2. Transferts thermiques dans les écoulements de PRB pleinement établis

Presque tous les travaux théoriques (Mori et Uchida (1966) [57]) expérimentaux (Mori et Uchida (1966) [57],

Tableau 5

Formules théoriques ou de corrélation donnant le nombre de Nusselt moyen en temps et en espace, en fonction du nombre de Rayleigh, dans des écoulements de R_{\perp} ou de $R_{//}$ pleinement établis

Table 5

Correlations or theoretical formulae for the space and time average Nusselt number, as a function of the Rayleigh number, in fully established R_{\perp} or $R_{//}$ flows

Références	Convection naturelle (CN) ou mixte (CM)	Structures convectives observées	Formules de corrélation $Nu = f(Ra, Re, Pr)$	B	Domaine de validité pour Ra	Pr
Mori et Uchida (1966) [57]	CM	$R_{//}$	$Nu = 1 + 1,413 \frac{Ra-1708}{Ra}$	∞	1708–3500	Air $Pr \sim 0,7$
Ostrach et Kamotani (1975) [58]	CN–CM	$R_{//}$	$Nu = 1 + \frac{8,3 \times 10^{-4} (Ra-1708)}{\sqrt{1+1,45 \times 10^{-4} (Ra-1708)^{4/3}}}$	18–36	1708–15000	Air $Pr \sim 0,7$
Fukui et al. (1983) [107]	CM	$R_{//}$	$\frac{Ra}{1708} Nu - 1 = 2,47 \left(\frac{Ra-1708}{1708} \right)^{1,07}$	20	1708–10000	Air $Pr \sim 0,7$
Müller et al. (1992) [68]	CM	R_{\perp}	$Nu = 1 + \frac{1}{\gamma} \frac{Ra-Ra^*(Re)}{Ra}$ où $1/\gamma = 1,423 + O(Re^2)$ à $Pr = 1$ et $1/\gamma = 1,4306 + O(Re^2)$ à $Pr = 6,4$	∞	1708–2500	$\forall Pr$
Schlüter et al. (1965) [132]	CN	R_{\perp}	$Nu = 1 + K(Pr) \frac{Ra-1708}{Ra}$	∞	1708–3500	$\forall Pr$
Platten et Legros (1984) [51, p. 445]	CN	R_{\perp}	$(Nu - 1) \frac{Ra}{1708} = K(Pr) \left(\frac{Ra-1708}{1708} \right)^{1,23}$	≥ 10	4000–28000	$\forall Pr$
Dans les deux dernières références $K(Pr) = \left(0,69942 - \frac{0,00472}{Pr} + \frac{0,00832}{Pr^2} \right)^{-1}$ $(K(Pr = 0,7) = 1,4091 ; K(Pr = 1) = 1,4224 ; K(Pr = 6,4) = 1,4308)$						

Ostrach et Kamotani (1975) [58], Fukui et al. (1983) [107] et numériques (Hwang et Cheng (1971) [130], Fukui et al. (1983) [107], Ouazzani et al. (1989) [31], Hasnaoui et al. (1991) [25], Narusawa (1993, 1998) [72,118], Chen et Lavine (1996) [131]) dans lesquels on calcule le nombre de Nusselt moyen en espace et en temps pour des écoulements de PRB pleinement établis s'accordent à dire que Nu ne dépend pas de Re et qu'il croît avec Ra . Cela vaut aussi bien pour les écoulements de $R_{//}$ [57,58,72,107,118,130,131] que pour les écoulements de R_{\perp} [25,31,131]. Autrement dit, selon toutes ces études, dans une conduite rectangulaire chauffée par le bas, le nombre de Nusselt reste le même qu'il y ait un écoulement (convection mixte) ou qu'il n'y en ait pas (convection naturelle). Nous allons voir ci-dessous que ce résultat est vrai à tous nombres de Reynolds pour les écoulements de $R_{//}$ mais qu'il n'est valable qu'à petits nombres de Reynolds pour les écoulements de R_{\perp} .

Dans le Tableau 5, on présente les différentes formules de corrélation donnant Nu en fonction de Ra extraites des travaux qui viennent d'être cités. On précise la gamme de nombres de Rayleigh et le fluide (nombre de Prandtl) pour lequel la formule a été calculée. L'extension latérale B de la conduite est supérieure à 10 dans tous les cas. On ajoute deux résultats de convection naturelle : le premier a été calculé théoriquement par Schlüter et al. (1965) [132] dans le domaine linéaire ; le second a été obtenu par Platten et Legros (1984) [51] en corrélant de très nombreux résultats théoriques, numériques et expérimentaux du domaine non-linéaire. On donne aussi l'expression de Nu calculée par Müller (1990) [67] et Müller et al. (1992) [68] à partir de leur équation de Ginzburg–Landau, dans le cas des R_{\perp} . Dans cette expression, γ est le coefficient qui intervient dans

l'équation d'amplitude en facteur du terme de saturation cubique (A^3). Son expression en fonction de Re à $Pr = 1$ et 6,4 est donnée dans le Tableau 4.

On peut noter que l'expression de Nu donnée par Müller et al. (1992) [68] n'est rien d'autre que l'expression de Schlüter et al. (1965) [132] dans laquelle $Ra_0^* = 1708$ est remplacé par $Ra_{\perp}^*(Re)$. Comme $Nu - 1$ est proportionnel à $Ra - Ra_{\perp}^*$, et que $Ra_{\perp}^*(Re)$ augmente lorsque Re augmente, le nombre de Nusselt pour les écoulements de R_{\perp} pleinement établis décroît lorsque Re augmente. Il atteint la valeur $Nu = 1$ lorsque $Ra = Ra_{\perp}^*(Re)$. Cette décroissance de Nu en fonction de Re est confirmée par les simulations numériques directes 2D de R_{\perp} réalisées sur une large gamme de nombres de Reynolds par Nicolas et al. (1997) [101] et par Nicolas (1997) [102] (voir la figure VI-18 et les commentaires de cette référence). Dans une moindre mesure, les simulations numériques 3D de Chen et Lavine (1996) [131] montrent aussi ce comportement. Dans les travaux de Ouazzani et al. (1989) [31] et de Hasnaoui et al. (1991) [25], la variation de Nu en fonction de Re a pu être négligée car seuls des petits nombres de Reynolds ont été considérés. ($Nu - 1$) étant proportionnel à $(Ra - Ra_{\perp}^*)$ pour les écoulements de R_{\perp} , on peut supposer que $(Nu - 1)$ est proportionnel à $(Ra - Ra_{//}^*)$ pour les écoulements de $R_{//}$. Donc, quand Re augmente à Ra fixé, Nu décroît dans le cas des R_{\perp} alors qu'il reste constant dans le cas des $R_{//}$ (puisque $Ra_{//}^*$ ne dépend pas de Re). Ainsi, lorsqu'on augmente le nombre de Reynolds, le passage de la configuration de R_{\perp} à celle de $R_{//}$ permet de maintenir un transfert de chaleur maximum à travers la conduite.

Parmi toutes les études citées, les seuls auteurs à avoir calculé le nombre de Nusselt dans des conduites de petit allongement transversal sont Chen et Lavine (1996) [131]

à $B = 2$ et Narusawa (1998) [118] pour $2 \leq B \leq 6$. Ils ont effectué des simulations numériques directes de R_{\parallel} à $Pr = 0,7$. Chen et Lavine (1996) [131] montrent que les transferts thermiques sont supérieurs de 10 % aux estimations les plus élevées obtenues aux mêmes valeurs de Ra lorsque B est grand (en l'occurrence, ces estimations sont celles de Ouazzani et al. (1989) [31] avec $B = 19,5$). Par contre, Narusawa (1998) [118] a obtenu des résultats inverses : il trouve que Nu augmente lorsque B augmente de $B = 2$ à $B = 6$ pour Ra fixé avec $3790 \leq Ra \leq 8300$. Narusawa (1993) [72] montre aussi qu'avec $B = 10$ le nombre de Nusselt moyen est inférieur de 8 à 10 % au résultat de Fukui et al. (1983) [107] obtenu avec $B = 20$ (cf. Tableau 5).

Dans le cadre de la CVD, à partir de mesures expérimentales dans l'air couvrant plusieurs configurations thermoconvectives (R_{\perp} , R_{\parallel} , R_{\parallel} sinueux), Chiu et al. (2000) [14] proposent deux corrélations en fonction de Re et $Gr' = Ra'/Pr$ sur les nombres de Nusselt moyens dans des écoulements à $9,5 \leq Re \leq 40$, $4,3 \times 10^5 \leq Gr' \leq 4,3 \times 10^6$, $B = 5$ et avec un substrat horizontal ou incliné à 8° . Fung et al. (1987) [133] proposent quant à eux une étude originale où ils calculent des écoulements pleinement développés et stationnaires de R_{\parallel} par simulations numériques 2D, en formulation (Ω, Ψ) , dans le plan (y, z) , pour des conduites dont l'extension latérale B varie entre 4 et 16 et pour $Pr = 0,73$. Dans cette étude, les parois sont chauffées à flux constant dans la moitié inférieure de la conduite et sont isolées dans la moitié supérieure. Pour $1000 \leq Gr \leq 25000$, jusqu'à quatre solutions stables (correspondant chacune à un nombre pair mais différent de R_{\parallel}) sont obtenues pour une valeur de B fixée. La multiplicité des solutions augmente lorsque B augmente. Un graphe présente à Gr fixé l'évolution du nombre de Nusselt pariétal moyen en fonction de B et du nombre de R_{\parallel} dans la conduite.

6.3. Longueurs d'apparition et d'établissement des R_{\parallel} et des R_{\perp}

6.3.1. Cas des R_{\parallel}

A partir de mesures d'anémométrie laser-Doppler dans des écoulements de R_{\parallel} dans l'azote, Chiu et Rosenberger (1987) [117] ont déterminé la longueur L_1 d'apparition des instabilités au début de la zone chauffée et la longueur L_2 d'établissement complet des R_{\parallel} . Précisément, L_1 correspond à la position où il apparaît à la côte $z = 0,2$ des modulations de plus de 3 % de la composante axiale U de la vitesse par rapport au profil de Poiseuille ; L_2 correspond à la position où l'amplitude de U atteint 95 % de son amplitude finale en $z = 0,5$. Les auteurs donnent pour L_1 et L_2 les deux formules suivantes, fonction de h , Re et $\varepsilon = (Ra - 1708)/1708$, corrélant leurs résultats expérimentaux pour $1300 < Ra < 8300$ et $15 < Re < 170$:

$$L_1 \approx 0,65h\varepsilon^{-0,44}Re^{0,76} \quad (14)$$

$$L_2 \approx 0,68h\varepsilon^{-0,69}Re^{0,96} \quad (15)$$

Les expériences de Chiu et Rosenberger (1987) [117] sont reproduites numériquement par Narusawa (1993) [72] avec un très bon accord. Les simulations numériques mettent en évidence que la longueur L_1 correspond assez bien à la position de Nu^{\min} dans la zone d'entrée (cf. Section 6.1 et Fig. 16) alors que la longueur L_2 correspond à la position où Nu atteint 95 % de sa valeur pleinement développée. Narusawa étudie aussi l'influence de la températures du fluide à l'entrée [72], des conditions aux limites thermiques adiabatiques et isothermes sur les parois verticales [72] et du rapport de forme B pour $2 \leq B \leq 6$ [118] sur les longueurs d'établissement des R_{\parallel} et sur le nombre de Nusselt à l'entrée. A partir de leurs simulations numériques directes 3D de R_{\parallel} à $Pr = 0,71$, Yu et al. (1997) [73] localisent la naissance des instabilités comme étant la position x_3 où le nombre de Nusselt moyen dans la direction transverse augmente de 3 % par rapport au cas de l'écoulement forcé. Cette position est donnée par une formule de corrélation semblable aux formules donnant x_1 et x_2 à la Section 6.1 ; elle est établie pour $20 \leq Re \leq 50$ et $6000 \leq Ra \leq 31000$ et s'écrit

$$Ra = 1672(x_3/Pe)^{-1,1} \quad [73] \quad (16)$$

Dans le cas de conduites d'allongement transversal suffisamment grand (disons $B \geq 6$), il est bien connu que les R_{\parallel} apparaissent progressivement dans la conduite : ils naissent près des parois verticales et se propagent de manière symétrique vers l'intérieur de la conduite plus on va vers l'aval (voir les expériences de Chiu et Rosenberger (1987) [117] et de Chang et al. (1997) [74] et les simulations numériques de Mahaney et al. (1987) [113], Narusawa (1993) [72], Nobile et Onesti (1996) [81] et Yu et al. (1997) [73]). Chang et al. (1997) [74], pour $B = 12$ et $Pr \approx 0,7$ (air), proposent des formules de corrélation fonction de Re et Ra donnant les positions d'apparition de la paire de R_{\parallel} en contact avec les parois, puis de la paire suivante, ainsi que la position où les R_{\parallel} occupent toute la largeur de la conduite.

6.3.2. Cas des R_{\perp}

Müller (1990) [67], Müller et al. (1989, 1992) [68,78], Ouazzani (1991) [134], Ouazzani et al. (1995) [135], Nicolas (1997) [102] et Nicolas et al. (1997) [101] ont déterminé la longueur d'établissement l_e des R_{\perp} à partir de l'enveloppe stationnaire $W_{\max}(x)$ de la composante de vitesse verticale maximale le long de l'axe de la conduite. L'évolution de W_{\max} en fonction de x est présentée à la Fig. 17 à $Pr = 6,4$, pour $Ra = 1836$ à plusieurs Re et pour $Re = 0,31$ à plusieurs Ra . A partir de l'entrée, W_{\max} croît avec x jusqu'au seuil de saturation W_s , sur une distance qui augmente lorsque Re augmente ou lorsque Ra diminue. C'est à dire que les R_{\perp} sont poussés de plus en plus vers l'aval du canal lorsque le débit augmente ou lorsque le gradient de température diminue. Ce résultat a été montré expérimentalement pour la première fois par Luijckx et al. (1981) [66] et nous l'avons déjà rencontré avec Evans et Greif (1989) [6] à la Section 6.1. Dans les références [67,68,78,101,102,134, 135], la longueur d'établissement l_e pour les R_{\perp} est défini-

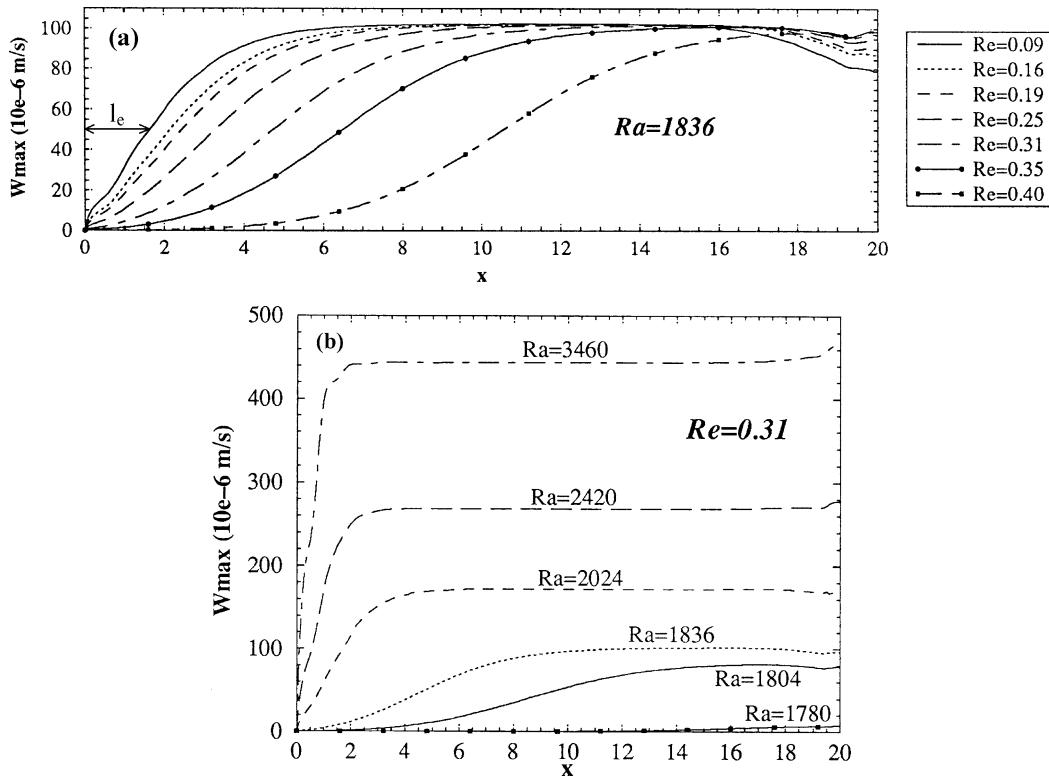


Fig. 17. Enveloppes stationnaires $W_{\max}(x)$ de la composante de vitesse verticale maximale obtenue par simulation numérique directe 2D à $Pr = 6,4$ avec $A = L/h = 20$: (a) à $Ra = 1836$ pour plusieurs valeurs de Re ; (b) à $Re = 0,31$ pour plusieurs valeurs de Ra . Tous ces points de calculs sont représentés à la Fig. 10. La longueur d'établissement l_e est représentée à $Ra = 1836$ et $Re = 0,09$ (tiré de Nicolas et al. (1997) [101]).

Fig. 17. Stationary envelopes $W_{\max}(x)$ of the maximum vertical velocity component obtained from 2D direct numerical simulations at $Pr = 6.4$ with $A = L/h = 20$: (a) at $Ra = 1836$ for several values of Re ; (b) at $Re = 0.31$ for several values of Ra . All these computational points are drawn on Fig. 10. The characteristic growth length l_e is drawn at $Ra = 1836$ and $Re = 0.09$ (extracted from Nicolas et al. (1997) [101]).

nie par $W_{\max}(l_e) = W_s/2$. Celle-ci est représentée par une double flèche à la Fig. 17 pour $Ra = 1836$ et $Re = 0,09$.

On rappelle que Müller et al. (1989, 1992) [68,78] étudient les écoulements de R_\perp à partir d'une équation de Ginzburg–Landau (cf. Section 5.3). A condition que Ra et Re restent suffisamment petits, ces auteurs montrent que toutes les courbes $l_e = f(Re)$ à Ra fixé, ou $l_e = f(Ra)$ à Re fixé, peuvent être «unifiées» en une seule courbe $L_e = f(V_g)$, où $L_e = \sqrt{\mu}l_e/\xi_0$ est la longueur d'établissement réduite et où $V_g = v_g\tau_0/(\mu\xi_0^2(1 + c_1^2))^{1/2}$ est la vitesse de groupe réduite. Dans ces deux expressions, v_g , μ , ξ_0 , τ_0 et c_1 sont les paramètres qui interviennent dans l'équation de Ginzburg–Landau (voir le Tableau 4 pour avoir leurs valeurs à $Pr = 1, 5,8$ et $6,4$). Pour $Pr = 1$, $Re \leq 4$ et $Ra \leq 2420$, ils montrent que la courbe théorique $L_e = f(V_g)$ concorde parfaitement avec leurs simulations numériques directes 2D des écoulements de R_\perp (voir la Fig. 6 de Müller et al. (1992) [68]). De plus, ils démontrent que la courbe $L_e = f(V_g)$ est *universelle*, dans le sens où elle est valable quel que soit le nombre de Prandtl. La Fig. 18 compare la courbe théorique $L_e = f(V_g)$ établie par Müller et al. avec des résultats de simulation numérique directe 2D obtenus par Nicolas (1997) [102] pour des écoulements de R_\perp à $Pr = 6,4$. Les courbes numériques et théorique concordent

effectivement tant que Re et Ra «ne sont pas trop grands» : à $Pr = 6,4$, cela correspond à $Ra < 2500$ et $Re < 0,5$.

La courbe théorique $L_e = f(V_g)$ diverge en $V_g = 2$ (cf. Fig. 18). Cela correspond au passage de la zone de R_\perp absolument instables ($V_g < 2$) à la zone de R_\perp convectivement instables ($V_g > 2$). On peut en effet vérifier en comparant les Figs. 10 et 17 que l_e augmente lorsqu'on se rapproche de la région convectivement instable et qu'elle diverge en $(Ra; Re) = (1836; 0,44)$ et $(1765; 0,31)$, c'est à dire exactement sur la courbe de transition Ra_\perp^{conv} (cf. Fig. 10). À Pr fixé, pour un écoulement non perturbé par un bruit extérieur, les valeurs de Ra et Re pour lesquelles l_e diverge permettent donc de définir très précisément la courbe de transition $Ra_\perp^{\text{conv}}(Re)$ (cf. Nicolas et al. (1997) [101]).

7. Évolution spatiale et temporelle des rouleaux transversaux (1989–2001)

Dans cette partie, nous proposons une analyse fine de la structure spatiale et du comportement temporel des R_\perp . Nous nous intéressons à l'influence des conditions aux limites de sortie (Section 7.1) et d'entrée (Section 7.2) sur le développement spatial des R_\perp dans les simulations numé-

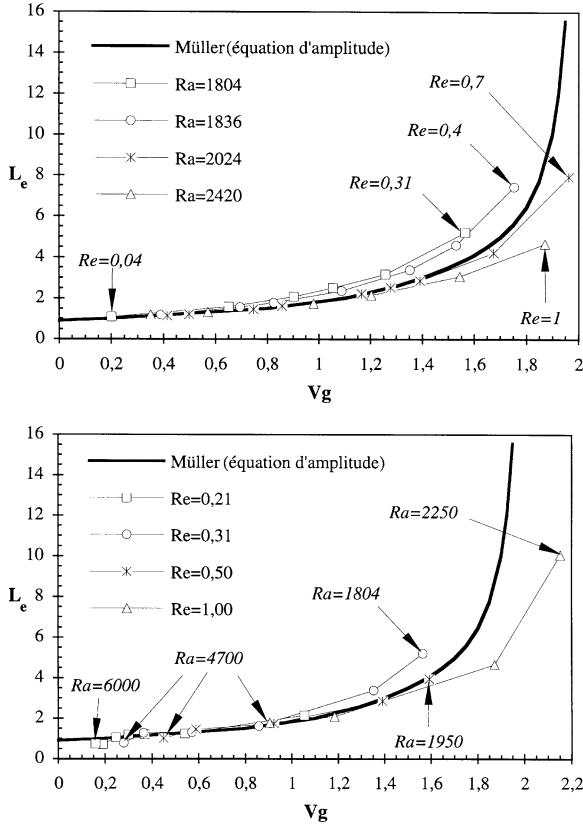


Fig. 18. Longueur d'établissement réduite L_e des R_\perp en fonction de la vitesse de groupe réduite V_g . Comparaison entre les simulations numériques 2D de Nicolas (1997) [102] à $Pr = 6,4$ (symboles), et la courbe théorique « universelle » de Müller et al. (1989, 1992) [68,78] (trait gras).

Fig. 18. Reduced characteristic growth length L_e of the R_\perp as a function of the reduced group velocity V_g . Comparison between the 2D numerical simulations of Nicolas (1997) [102] at $Pr = 6,4$ (symbols), and the “universal” theoretical curve of Müller et al. (1989, 1992) [68,78] (bold line).

riques directes et dans les expériences. À la Section 7.2, il sera notamment question du blocage des R_\perp provoqué par les conditions d'entrée pour des valeurs petites mais non nulles de Re . Aux Sections 7.3, 7.4 et 7.5, on s'intéressera respectivement à la fréquence f des R_\perp , à leur longueur d'onde λ et au rapport Vr/U° de la vitesse des R_\perp sur la vitesse débitante, en fonction des paramètres de l'écoulement : Ra , Re , Pr et/ou B .

7.1. Choix et influence des conditions aux limites de sortie dans les simulations numériques directes

Lors du minisymposium sur les conditions aux limites ouvertes qui s'est tenu à Swansea en juillet 1989, et dont le résumé a été publié par Sani et Gresho (1994) [136], ces auteurs ont proposé d'utiliser, entre autres, l'écoulement de PRB 2D comme configuration de référence pour étudier l'influence des conditions aux limites de sortie lors de la simulation numérique d'écoulements instationnaires avec recirculations et frontières ouvertes. Le cas test qui a été choisi est l'écoulement absolument instable de R_\perp qui

apparaît à $Pr = 2/3$, $Ra = 10000$ et $Re = 10$. Une solution précise pour cet écoulement a été calculée par Evans et Paolucci (1990) [137]. Quatre études (les deux plus anciennes font partie des contributions au minisymposium) ont utilisé ce cas test pour comparer différents types de conditions aux limites ouvertes sur la frontière de sortie : Bottaro (1990) [138], Kobayashi et al. (1993) [139] et Nicolas et al. (1997) [140] ont utilisé des codes basés sur une formulation en variables primitives (U , W , P) avec une méthode de volumes finis et des algorithmes de résolution de type SIMPLE, SIMPLE et Lagrangien augmenté, respectivement. Comini et al. (1997) [141] ont utilisé un code basé sur une formulation de type fonction de courant-rotationnel (ψ , Ω) avec une méthode d'éléments finis.

Sur l'ensemble de ces travaux, onze conditions aux limites de sortie différentes ont été testées. Parmi celles-ci, on trouve des profils imposés de vitesse et de température, des dérivées normales de vitesse et de température nulles, des conditions de type Fourier (c'est à dire des conditions mixtes entre les conditions de Dirichlet et de Neumann), des extrapolations de vitesse et de température utilisant les deux ou trois points en amont de la frontière et l'imposition de la conservation de la masse obtenue en discrétilisant l'équation de continuité. Enfin, les quatre études ont testé des conditions aux limites de type Orlanski (cf. Orlanski (1976) [142]). Cette condition à la limite est la seule parmi toutes celles testées qui varie au cours du temps. Elle consiste à écrire en sortie de conduite une équation de transport dans la direction axiale x pour les grandeurs $f = (U, W, T, \Omega)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + U^\circ \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (17)$$

où la vitesse de transport $U^\circ = \text{cste}$ est la vitesse moyenne de l'écoulement dans la conduite. La condition de type Orlanski pour ψ est plus compliquée. Elle dérive de l'équation (17) et des expressions de U et de Ω en fonction de ψ (cf. Comini et al. (1997) [141]).

Sans contestation possible, il ressort de ces quatre études que la condition de sortie de type Orlanski (équation (17)) est celle qui perturbe le moins l'écoulement. Nicolas et al. (1997) [140] montrent que c'est la seule qui permette un écoulement rentrant, lorsqu'un R_\perp est à cheval sur la frontière de sortie. Ils déterminent l'amplitude de la perturbation et la longueur de la zone perturbée en amont de la frontière de sortie, en comparant les enveloppes des composantes de vitesses minimales et maximales (du type de celles présentées à la Fig. 17). A Ra et Re fixés, ils montrent que la condition de type Orlanski permet de réduire de manière très importante l'amplitude de la perturbation mais que la longueur de la zone perturbée reste approximativement la même quelle que soit la condition à la limite testée. Ils montrent que la longueur de la zone perturbée augmente quand Ra ou Re diminuent, et que cette longueur peut atteindre cinq à six fois la hauteur de la conduite à l'approche de Ra_\perp^* . Enfin, en accord avec les propriétés des écoulements absolument instables soumis à un forçage extérieur (cf. Section 5.1), ils

montrent que les caractéristiques (λ , f , Nu) des écoulements de R_\perp pour $Ra > Ra_\perp^{\text{conv}}$ ne varient pas d'une condition de sortie à l'autre, lorsque ces caractéristiques sont mesurées en dehors de la zone perturbée localement par les conditions de sortie.

7.2. Influence des conditions aux limites d'entrée et blocage des R_\perp à petit débit

Sur l'ensemble des études qui ont traité de l'influence des conditions d'entrée, la même condition pour U est toujours appliquée : c'est soit un profil carré soit un profil de Poiseuille. Par contre, deux grandes classes de conditions d'entrée sont étudiées pour W et T . La première classe concerne des conditions de type Neumann : on impose des gradients nuls pour W et/ou T , et donc un extremum local à l'écoulement. La phase des R_\perp étant fixée à l'entrée, les anglo-saxons nomment ce type de conditions par «phase-fixing» ou «phase-pinning boundary conditions». La deuxième classe concerne des conditions de type Dirichlet imposant des profils constants ou non de vitesse et de température, et donc une amplitude nulle pour les R_\perp .

Roth et al. (1996) [143] ont proposé une étude de l'influence des conditions aux limites d'entrée et de sortie sur des écoulements de R_\perp 2D absolument instables. Deux conditions sur W ($W = 0$ ou $\partial W / \partial x = 0$) et trois conditions sur T ($T = 1 - z$, $T = 1/2$ ou $\partial T / \partial x = 0$) sont testées en $x = 0$ et en $x = A = L/h = 50$. Pour U , un profil de Poiseuille est imposé en $x = 0$ et en $x = A$. L'étude confirme que les conditions aux limites de sortie n'ont qu'une influence locale (dans le voisinage de $x = A$) sur la longueur d'onde λ et sur l'amplitude de U , W et T . Leur influence sur l'écoulement de R_\perp pleinement établi est négligeable. Par contre, l_e , λ et f varient selon le type de conditions en $x = 0$. Roth et al. (1996) [143] expliquent la différence d'influence des conditions d'entrée par rapport aux conditions de sortie par un taux d'amplification des perturbations différent pour les x croissants (sens de l'écoulement) et pour les x décroissants (sens inverse de l'écoulement). Ils montrent, par exemple, qu'un changement des conditions d'entrée induit des variations de la fréquence des R_\perp 10^3 à 10^5 fois plus grandes qu'avec un changement des conditions de sortie.

Roth et al. (1996) [143] montrent qu'en imposant des conditions de Dirichlet à l'entrée, la longueur d'onde λ reste constante tout le long de la conduite, tandis qu'avec des conditions de type Neumann, λ est élevée à l'entrée et diminue exponentiellement le long de la conduite pour tendre, loin en aval, vers la valeur de λ obtenue avec des conditions de Dirichlet. D'autre part, les conditions de Neumann sélectionnent des R_\perp de fréquence f plus petite qu'avec des conditions de Dirichlet. Cependant, lorsqu'on se rapproche de la courbe de transition Ra_\perp^{conv} , i.e., lorsque la longueur d'établissement l_e tend vers l'infini (cf. Section 6.3.2), l'influence des conditions d'entrée sur la fréquence des R_\perp devient négligeable car ces derniers se forment très loin en aval. Seule la relation de dispersion qui lie la pulsation

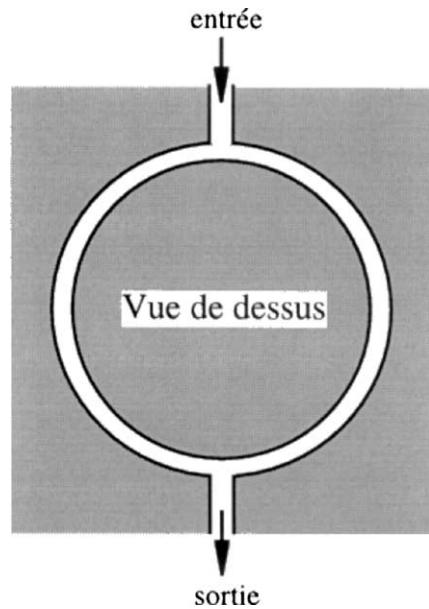


Fig. 19. Représentation schématique de la cellule expérimentale de Pocheau et al. (1987) [144].

Fig. 19. Scheme of the experimental channel of Pocheau et al. (1987) [144].

σ_i au nombre d'onde k_x des R_\perp ne varie pas lorsqu'on change les conditions aux limites ouvertes. Roth et al. (1996) [143] montrent numériquement et théoriquement à partir d'une équation de Ginzburg-Landau que cette relation s'écrit :

$$\sigma_i - \sigma_i^* = v_g(k_x - k_x^*) \quad (18)$$

où σ_i^* , k_x^* sont données par les formules (2) et (3) de la Section 4.2.2 et où v_g est donné dans le Tableau 4.

Müller et al. (1992) [68,91] ont étudié les conditions aux limites ouvertes suivantes : $\partial W / \partial x = \partial T / \partial x = 0$ en $x = 0$ et en $x = A = L/h$. Ce choix a été motivé par les expériences de visualisation de Pocheau et al. (1987) [144] qui se sont intéressés à l'écoulement de PRB dans un espace annulaire d'axe vertical, de section rectangulaire, dans lequel l'entrée et la sortie du fluide se font par deux ouvertures diamétralement opposées (cf. Fig. 19). Le fluide circule symétriquement dans les deux moitiés de l'anneau et l'écoulement thermoconvectif obtenu forme une chaîne de R_\perp , d'axes radiaux. Ce système permet d'imposer la phase des structures convectives au niveau des ouvertures de l'anneau, à l'entrée et à la sortie du fluide. Dans cette situation, des R_\perp stationnaires, de longueur d'onde uniforme, sont observés à $Re = 0$. Pour $Re \neq 0$ et suffisamment petit (en fait, si Re est inférieur à une certaine valeur critique Re^{**}), les R_\perp restent stationnaires, mais ils se déforment : leur longueur d'onde λ augmente à l'entrée et diminue à la sortie de l'anneau. Dans la suite, nous appellerons «blocage des R_\perp » ce phénomène. Enfin, si $Re > Re^{**}$, une instabilité d'Eckhaus, localisée près des ouvertures de l'anneau, apparaît. Elle provoque soit la génération d'un rouleau à l'entrée, soit la disparition d'un rouleau à la sortie. Cela est à l'origine de la mise en

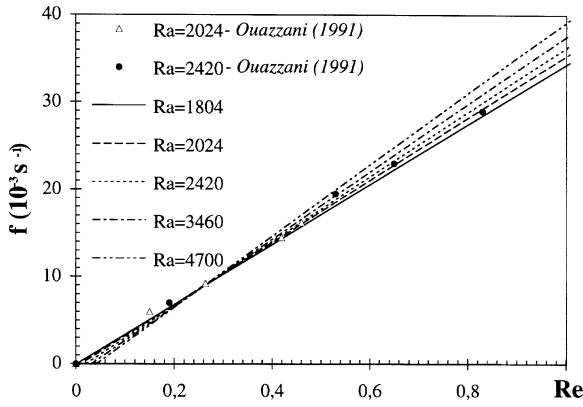


Fig. 20. Variation de la fréquence f des R_\perp en fonction de Re , pour plusieurs valeurs de Ra , à $Pr = 6,4$. Comparaison entre les expériences de Ouazzani (1991) [134] (symboles) et les simulations numériques 2D de Nicolas et al. (1997) [101] (lignes). Mise en évidence du blocage des R_\perp à Re petit (tiré de [101]).

Fig. 20. Variation of the R_\perp frequency f as a function of Re , for several values of Ra , at $Pr = 6,4$. Comparison between the experiments of Ouazzani (1991) [134] (symbols) and the 2D numerical simulations of Nicolas et al. (1997) [101] (lines). The pinning of the R_\perp is clearly shown at small Re (extracted from [101]).

mouvement des R_\perp . Müller et al. (1992) [68,91] retrouvent ce comportement de l'écoulement, d'une part, grâce aux simulations numériques 2D utilisant les conditions aux limites décrites un peu plus haut et, d'autre part, grâce à une équation de diffusion de phase établie rigoureusement à partir de leur équation de Ginzburg–Landau. Ce modèle leur permet d'obtenir une estimation (majorée) du nombre de Reynolds critique Re^{**} entre les rouleaux stationnaires déformés et les rouleaux en déplacement. Ils trouvent la valeur suivante :

$$Re^{**} \approx \frac{2,126\sqrt{\varepsilon}}{(Pr + 0,3432)A} \quad (19)$$

où ε est l'écart relatif entre Ra et $Ra_0^* = 1708$ et où A est l'allongement de la conduite (cf. nomenclature).

Müller et al. (1992) [68,91] et Roth et al. (1996) [143] expliquent le blocage des R_\perp comme étant une conséquence directe des conditions de Neumann utilisées à l'entrée de la conduite. En fixant la phase, le premier rouleau qui se forme à l'entrée reste bloqué tant que le débit est suffisamment faible. Il s'allonge quand Re augmente. Pour $Re > Re^{**}$, il se « détache » de l'entrée et entraîne avec lui l'ensemble des R_\perp aval qui se mettent alors en mouvement. Pourtant, deux études ont aussi observé un phénomène de blocage des R_\perp en utilisant des conditions de Dirichlet. Tout d'abord, Schröder et Bühler (1995) [145] ont mené une étude expérimentale des écoulements de PRB avec de l'huile de silicone dans un canal rectangulaire dont l'entrée et la sortie sont constituées par deux petites briques poreuses très conductrices de la chaleur. Ils ont aussi reproduit leurs expériences avec des simulations numériques 3D, en imposant un profil de vitesse carré et un profil de température linéaire comme conditions d'entrée et de sortie du domaine de calcul. Dans les deux études

Tableau 6

Comparaison entre les nombres de Reynolds critiques Re^{**} (marquant le seuil de blocage des R_\perp observé à très petits débits) obtenus par les simulations numériques de Nicolas et al. (1997) [101] et par la théorie de Müller et al. (1992) [68], à $Pr = 6,4$ et $A = L/h = 10$

Table 6

Comparison between the critical Reynolds numbers Re^{**} (indicating the threshold of the R_\perp pinning observed for very small flows) obtained from the numerical simulations of Nicolas et al. (1997) [101] and from the theory of Müller et al. (1992) [68], at $Pr = 6,4$ and $A = L/h = 10$

Ra	ε	Re^{**} d'après la Fig. 20	Re^{**} d'après la formule (19)
1804	0,056	0,003	0,007
2024	0,185	0,011	0,014
2420	0,417	0,021	0,020
3460	1,026	0,032	0,032
4700	1,752	0,042	0,042

(expérimentale et numérique), le blocage des R_\perp à petit débit est très nettement mis en évidence. De plus, comme dans la formule (19), il est montré que le seuil de blocage Re^{**} augmente quand Ra augmente ou quand A diminue. Nicolas et al. (1997) [101] ont mené quant à eux une étude des R_\perp par simulation numérique 2D en imposant un profil de Poiseuille purement conductif à l'entrée et des conditions d'Orlanski à la sortie du domaine de calcul. La Fig. 20 illustre le blocage des R_\perp observé dans ces simulations effectuées à $Pr = 6,4$ et pour $A = L/h = 10$. Elle montre que la fréquence f de passage des R_\perp s'annule pour des valeurs non nulles de Re , et ce d'autant plus que Ra est grand. Au Tableau 6, nous comparons les valeurs de Re^{**} obtenues par la formule théorique (19), qui s'écrit $Re^{**} \approx 0,0315\varepsilon^{1/2}$ à $Pr = 6,4$ et $A = 10$, à celles déduites des droites d'interpolation linéaire présentées à la Fig. 20. Il est très étonnant de constater que la formule théorique, qui a priori n'est valable que pour des conditions de type Neumann et des nombres de Rayleigh modérés, concorde aussi bien avec les simulations numériques. L'origine du blocage des R_\perp avec des conditions d'entrée de type Dirichlet n'ayant pas été clairement identifiée, ce problème mérite encore des approfondissements.

7.3. Fréquence f des R_\perp

Müller et al. (1989, 1992) [68,78], Roth et al. (1996) [143] et Nicolas (1997) [102] s'accordent à dire que pour un ensemble donné de paramètres (Ra , Re , Pr) correspondant à un écoulement 2D de R_\perp absolument instables, une et une seule structure thermoconvective est sélectionnée. Autrement dit, la fréquence f et la longueur d'onde λ des R_\perp ne dépendent pas des conditions initiales, de l'histoire de l'écoulement et de la longueur de la conduite, à condition que cette dernière soit suffisamment longue pour permettre l'apparition de R_\perp pleinement développés.

En négligeant le décalage causé par le blocage des R_\perp pour les très petites valeurs de Re (cf. Section 7.2), on peut considérer que f varie quasi linéairement en fonction de

Tableau 7

Valeurs moyennes de la longueur d'onde λ des R_\perp en fonction de Pr , Re , Ra et B . Ra et λ sont comparés aux valeurs critiques au seuil de l'instabilité linéaire temporelle Ra_\perp^* (Re , Pr , B) et λ^* (Re , Pr , B) tirées de Nicolas et al. (2000) [53] et de Luijkx et Platten (1981) [71]

Table 7

Average values of the R_\perp wave length λ as a function of Pr , Re , Ra and B . Ra and λ are compared with the linear critical values Ra_\perp^* (Re , Pr , B) and λ^* (Re , Pr , B) extracted from Nicolas et al. (2000) [53] and Luijkx and Platten (1981) [71]

Références	Méthode	B	Pr	Re	Ra	λ
Schröder et Bülher (1995) [145]	Simulations numériques 3D	4,1	530	0	$7600 \approx 4,4 Ra_\perp^*$	$1,79 \approx 0,86\lambda^*$
				$0,8 \times 10^{-3} < Re < 1,4 \times 10^{-3}$	$7600 \approx 4,3 Ra_\perp^*$	$2,42 \approx 1,14\lambda^*$
				$1,4 \times 10^{-3} < Re < 2,5 \times 10^{-3}$	$7600 \approx 4,3 Ra_\perp^*$	$2,3 \approx 1,07\lambda^*$
Luijkx et al. (1981) [66]	Expériences	5,25	450	$0,3 \times 10^{-3}$	$4500 \approx 2,6 Ra_\perp^*$	$2,20 \approx 1,07\lambda^*$
				$0,95 \times 10^{-3}$	$4500 \approx 2,6 Ra_\perp^*$	$2,15 \approx 1,04\lambda^*$
				$3,7 \times 10^{-3}$	$16600 \approx 9,7 Ra_\perp^*$	$1,63 \approx 0,79\lambda^*$
Nicolas et al. (1997) [101] et Fig. 28	Simulations numériques 2D	∞	6,4	1	$2420 \approx 1,4 Ra_\perp^*$	$1,83 \approx 0,9\lambda^*$
				1	$3460 \approx 1,9 Ra_\perp^*$	$1,77 \approx 0,88\lambda^*$
				1	$4700 \approx 2,6 Ra_\perp^*$	$1,73 \approx 0,86\lambda^*$
				2	$3460 \approx 1,9 Ra_\perp^*$	$1,71 \approx 0,84\lambda^*$
Müller et al. (1989, 1992) [68,78]	Simulations numériques 2D	∞	1	2	$1900 \approx 1,1 Ra_\perp^*$	$1,98 \approx 0,98\lambda^*$
				2	$2420 \approx 1,4 Ra_\perp^*$	$1,93 \approx 0,96\lambda^*$
				4	$2420 \approx 1,4 Ra_\perp^*$	$1,90 \approx 0,94\lambda^*$
Evans et Paolucci (1990) [137]	Simulations numériques 2D	∞	2/3	10	$10000 \approx 5,6 Ra_\perp^*$	$1,44 \approx 0,72\lambda^*$

Re pour Ra et Pr fixés (cf. Ouazzani (1991) [134], Schröder et Bühl (1995) [145], Nicolas et al. (1997) [101] et la Fig. 20). L'influence du nombre de Rayleigh sur f est beaucoup moins nette. Par exemple, pour Re et Pr fixés, Schröder et Bühl (1995) [145] observent que f décroît légèrement lorsque Ra augmente alors que Nicolas et al. (1997) [101] observent le contraire dès que Re est suffisamment grand (cf. Fig. 20). Nous pensons que cela est lié aux valeurs très différentes de Pr et B entre ces deux études : $Pr = 530$ et $B = 4,1$ pour Schröder et Bühl alors que $Pr = 6,4$ et $B \rightarrow \infty$ pour Nicolas et al. (calculs 2D). En effet, comme nous allons le voir au paragraphe suivant, les variations de la longueur d'onde moyenne, et donc de la fréquence, sont très différentes selon les valeurs de Pr et de B .

7.4. Longueur d'onde λ des R_\perp

Dans les écoulements de PRB, pour mesurer précisément la longueur d'onde, il est nécessaire d'utiliser des conduites de grand allongement, ce qui est la cause de coûts élevés en calcul numérique et de difficultés expérimentales telles que le maintien tout le long de la conduite de températures uniformes sur les parois horizontales et d'un écartement constant entre ces parois. A cause de cela, il existe peu d'information sur l'évolution de λ en fonction des paramètres Re , Ra , Pr et B , et les quelques résultats disponibles sont difficiles à relier les uns aux autres car ils sont obtenus pour des valeurs très différentes de Pr et de B (cf. Tableau 7).

Dans le domaine non-linéaire, il semble admis qu'à Ra , Pr et B fixés, la longueur d'onde λ des R_\perp décroît lorsque Re augmente, à condition que Re ne soit pas trop petit. Ce résultat est clairement mis en évidence par les simulations numériques 2D de Müller et al. (1989, 1992) [68,78] à $Pr = 1$

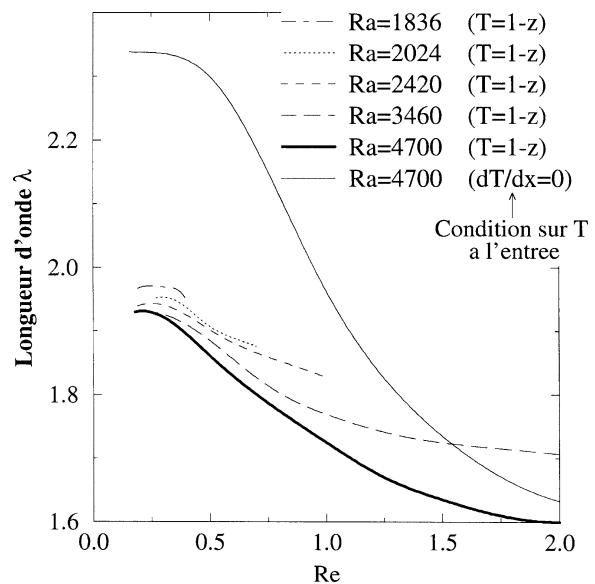


Fig. 21. Variations de la longueur d'onde λ des R_\perp en fonction de Re , pour plusieurs valeurs de Ra et à $Pr = 6,4$, obtenue par simulations numériques 2D par Nicolas (1997) [102] et Nicolas et al. (1997) [101]. A $Ra = 4700$, on compare l'influence sur λ des conditions d'entrée sur la température de type Dirichlet ($T = 1 - z$) et de type Neumann ($\partial T / \partial z = 0$).

Fig. 21. Variation of the R_\perp wave length λ as a function of Re , for several values of Ra , at $Pr = 6,4$, resulting from the 2D numerical simulations of Nicolas (1997) [102] and Nicolas et al. (1997) [101]. At $Ra = 4700$, the influence on λ of the entrance temperature boundary conditions of Dirichlet type ($T = 1 - z$) and of Neumann type ($\partial T / \partial z = 0$) are compared.

et par les expériences de Luijkx et al. (1981) [66] à $Pr = 450$ (huile aux silicones) et $B = 5,25$. Nos propres calculs 2D à $Pr = 6,4$ (cf. Fig. 21) et les simulations numériques 3D de Schröder et Bühl (1995) [145] à $Pr = 530$ et $B = 4,1$ (cf.

Tableau 8

Tableau récapitulatif des relations de la littérature donnant la variation en fonction de Ra du rapport Vr/U° de la vitesse des R_\perp sur la vitesse moyenne de l'écoulement, pour plusieurs valeurs du nombre de Prandtl Pr et de l'allongement transversal B

Table 8

Recapitulative table of the relations found in literature giving the variation of the ratio Vr/U° of the R_\perp velocity to the average velocity of the flow, as a function of Ra , for several values of the Prandtl number Pr and of the tranversal aspect ratio B

Références	Méthodes	Pr	$B = l/h$	$Vr/U^\circ = f(Ra)$
Hasnaoui et al. (1991) [25]	Simulations numériques 2D	0,1	∞	$Vr/U^\circ \approx 0,952 - 2,87 \times 10^{-5} Ra$
Hasnaoui et al. (1991) [25]	Simulations numériques 2D	0,7	∞	$Vr/U^\circ \approx 1,157 - 0,77 \times 10^{-5} Ra$
Chen et Lavine (1996) [131]	Simulations numériques 3D	0,7	2	$Vr/U^\circ = 1,51 - 9,5 \times 10^{-5} Ra$
Ouazzani et al. (1989) [31] Yu et al. (1997) [128]	Visualisations par plans laser	0,71	17,4	$Vr/U^\circ = 1,5 - 2,7 \times 10^{-5} Ra$
Müller et al. (1992) [68]	Equation de Ginzburg–Landau	1	∞	$Vr/U^\circ = 1,193 - 1,29 \times 10^{-5} Ra$
Müller et al. (1992) [68]	Equation de Ginzburg–Landau	6,4	∞	$Vr/U^\circ = 1,308 - 1,33 \times 10^{-5} Ra$
Nicolas et al. (1997) [101]	Simulations numériques 2D (PBC — repère mobile)	6,4	∞	$Vr/U^\circ = 1,299 - 0,83 \times 10^{-5} Ra$
Nicolas et al. (1997) [101]	Simulations numériques 2D (PBC — repère fixe)	6,4	∞	$Vr/U^\circ = 1,282 - 0,82 \times 10^{-5} Ra$
Hasnaoui et al. (1991) [25]	Simulations numériques 2D	7	∞	$Vr/U^\circ \approx 1,284 - 0,90 \times 10^{-5} Ra$
Nicolas et al. (1997) [101]	Simulations numériques 2D (OBC)	6,4	∞	$Vr/U^\circ = 1,254 - 0,95 \times 10^{-5} Ra$
Ouazzani et al. (1990) [32]	Anémométrie laser-Doppler	6,4	3,63	$Vr/U^\circ = 1,62 - 8,67 \times 10^{-5} Ra$
Ouazzani (1991) [134]	Interférométrie différentielle	8,3	3,63	$Vr/U^\circ = 1,53 - 9,6 \times 10^{-5} Ra$
Schröder and Bühler (1995) [145]	Simulations numériques 3D	530	4,1	$Vr/U^\circ = 1,53 - 3,18 \times 10^{-5} Ra$

Tableau 7) confirment ce résultat, sauf pour les très petites valeurs de Re pour lesquelles il y a un léger allongement des R_\perp si Re augmente (l'influence des conditions d'entrée sur la forme des R_\perp n'est probablement plus négligeable (cf. Section 7.2)). On notera, à la Fig. 21, pour $Ra = 4700$, que la décroissance de λ quand Re augmente est valable quel que soit le type de condition d'entrée. Dans le cas de la condition de Neumann $\partial T/\partial x = 0$, la longueur d'onde diminuant le long de l'axe de la conduite (cf. Section 7.2), la valeur de λ est une moyenne obtenue sur les 7 ou 8 premiers R_\perp pleinement établis apparaissant en aval de l'entrée. Pour corroborer ce qui a déjà été dit à la Section 7.2 à propos de l'influence des conditions d'entrée sur la fréquence, on remarque que lorsque Re est suffisamment grand ($Re = 2$ pour $Ra = 4700$ sur la Fig. 21), la valeur de λ devient indépendante du type de condition d'entrée, celles-ci n'agissant plus sur la structure des rouleaux qui naissent loin en aval.

Dans le cas de la convection naturelle de Rayleigh–Bénard, Platten et Legros (1984) [51, p. 448] constatent que, d'une manière générale, dans les expériences, la longueur d'onde λ des R_\perp augmente lorsque Ra augmente, alors que dans les simulations numériques 2D c'est le contraire. Au Tableau 7, la comparaison de λ avec la valeur critique λ^* (obtenue pour $Ra = Ra_\perp^*$) montre aussi ce comportement dans les écoulements de PRB, sauf à $Pr = 450$ à grand nombre de Rayleigh. On constate que $\lambda > \lambda^*$, i.e., que λ augmente avec Ra , à la fois pour les grands nombres de Prandtl et les petits allongements transversaux. On notera qu'il aurait été plus judicieux d'effectuer les comparaisons avec λ^{conv} la valeur de λ obtenue pour $Ra = Ra_\perp^{\text{conv}}$. Malheureusement, λ^{conv} n'est pas donnée explicitement dans la littérature. Il apparaît aussi au Tableau 7 que λ augmente lorsque B di-

minue ou lorsque Pr augmente. Cependant, il est difficile de savoir lequel des deux paramètres à l'influence prépondérante. Quoi qu'il en soit, l'influence précise de Ra , de B et de Pr sur λ est un problème difficile à éclaircir avec les données actuelles, et il mérite des approfondissements.

7.5. Rapport Vr/U° de la vitesse des R_\perp sur la vitesse moyenne de l'écoulement

Une caractéristique importante des écoulements de PRB est le rapport adimensionnel entre la vitesse de phase des R_\perp , $Vr = \sigma_i/k_x$, et la vitesse moyenne de l'écoulement dans la direction axiale U° . Müller (1990) [67] et Müller et al. (1992) [68] montrent à partir de l'équation de Ginzburg–Landau que :

$$\frac{Vr}{U^\circ} = \frac{\sigma_i^* + v_g q + \xi_0^2 q^2 (c_1 - c_2)/\tau_0 - \mu(c_0 - c_2)/\tau_0}{(k_x^* + q) Pr Re} \quad (20)$$

où $q = k_x - k_x^*$ et où les autres paramètres ont déjà été donnés aux Sections 4.2.2 et 5.3 et au Tableau 4. Nous avons vu que σ_i^* , v_g , c_0 , c_1 et c_2 sont proportionnels à Re à l'ordre le plus bas, alors que k_x^* , τ_0 et ξ_0^2 sont constants. Ainsi, si Re reste suffisamment petit, Re n'apparaît plus explicitement dans (20). Comme, de plus, près du seuil, $k_x \approx k_x^*$ et donc $q \approx 0$, l'équation (20) montre que le rapport Vr/U° décroît linéairement avec l'écart relatif au seuil $\mu = (Ra - Ra_\perp^*(Re))/Ra_\perp^*(Re)$. C'est à dire qu'à Re fixé, Vr/U° décroît linéairement avec Ra . Vr/U° devient même indépendant de Re si on considère que Re reste suffisamment petit, car alors $\mu \approx \varepsilon = (Ra - 1708)/1708$. La dépendance linéaire de Vr/U° en fonction de Ra a été très largement vérifiée dans la littérature. Nous faisons un

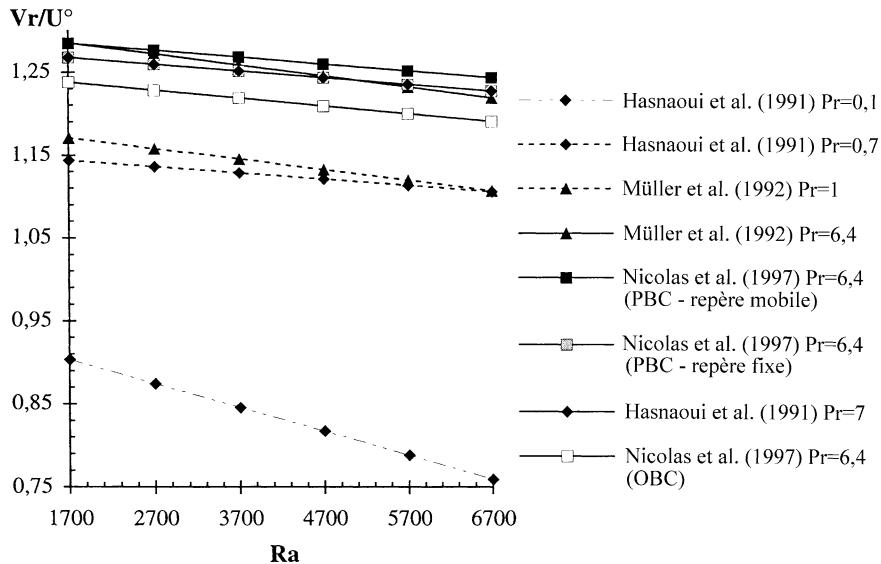


Fig. 22. Influence du nombre de Prandtl sur les droites $V_r/U^\circ = f(Ra)$ dont les équations, obtenues dans des modélisations 2D des écoulements de R_\perp ($B \rightarrow \infty$), sont données dans le Tableau 8.

Fig. 22. Influence of the Prandtl number on the straight lines $V_r/U^\circ = f(Ra)$ whose equations, obtained from 2D modelisation of the R_\perp flows ($B \rightarrow \infty$), are given in Table 8.

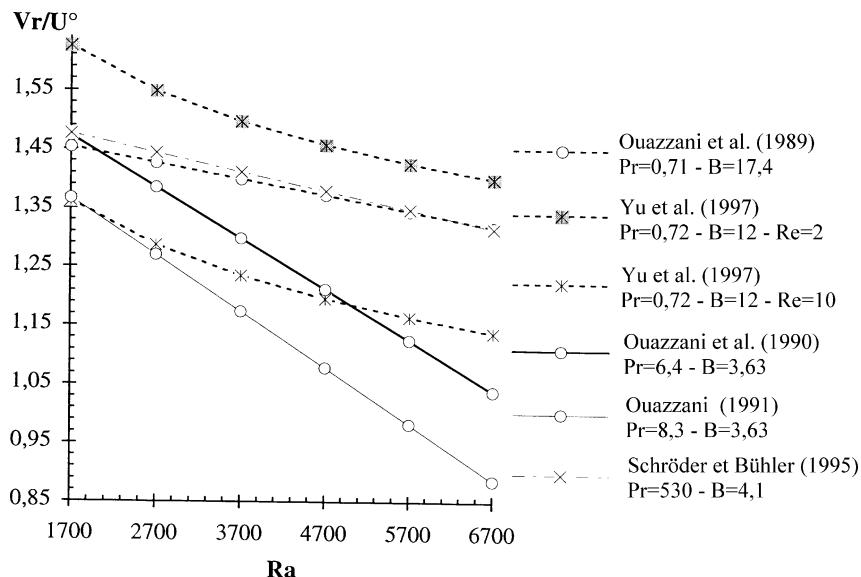


Fig. 23. Influence du confinement latéral B et du nombre de Prandtl Pr sur les courbes $V_r/U^\circ = f(Ra)$ dont les équations, obtenues dans des expériences et des simulations numériques 3D, sont données dans le Tableau 8.

Fig. 23. Influence of the lateral confinement B and of the Prandtl number Pr on the curves $V_r/U^\circ = f(Ra)$ whose equations, obtained from experiments and 3D numerical simulations, are given in Table 8.

récapitulatif de toutes les lois obtenues au Tableau 8. Nous donnons notamment à $Pr = 1$ et $6,4$ les expressions de V_r/U° calculées à partir de l'équation (20) simplifiée et des coefficients du Tableau 6. Tous les résultats obtenus par simulations numériques l'ont été en utilisant des conditions aux limites périodiques (PBC), sauf dans un cas (noté OBC dans le Tableau 8) où Nicolas et al. (1997) [101] ont utilisé des conditions de Dirichlet à l'entrée et des conditions aux limites ouvertes en sortie. Nicolas et al. (1997) [101] ont aussi effectué des calculs de V_r/U° en utilisant des

conditions aux limites périodiques et en se plaçant dans un «repère mobile» se déplaçant à la même vitesse que les R_\perp afin de rendre l'écoulement stationnaire.

Les résultats du Tableau 8 sont très dispersés. Pour mieux les visualiser, nous présentons aux Figs. 22 et 23 les courbes $V_r/U^\circ = f(Ra)$, respectivement pour $B \rightarrow \infty$ (simulations numériques 2D) et pour B fini (simulations numériques 3D et expériences). Au Tableau 8, on constate qu'à Pr fixé (cf. $Pr = 0,7$ et $6,4$), la pente des droites lorsqu'il y a confinement latéral est toujours plus importante que lorsque

$B \rightarrow \infty$ (voir à ce sujet la discussion dans Nicolas et al. (1997) [101]). On remarque que Yu et al. (1997) [128] proposent, à partir de leurs expériences dans l'air, une relation logarithmique fonction de Re et de Ra . A la Fig. 23, nous avons tracé cette relation pour $Re = 2$ et $Re = 10$ ($Re = 10$ correspond approximativement au nombre de Reynolds critique $Re_{\perp-\parallel}^*$ dans le cas d'écoulements d'air). Compte tenu des autres résultats, la très légère concavité des deux courbes est acceptable. Dans une moindre mesure, Nicolas (1997) [102] obtient aussi ce comportement dans ses simulations numériques 2D avec des conditions aux limites périodiques. Par contre, la variation en fonction de Re de ces courbes logarithmiques est en désaccord avec les autres études.

Lorsque $B \rightarrow \infty$, la Fig. 22 montre que Vr/U° augmente quand le nombre de Prandtl augmente. Ce comportement rejoint celui de λ (cf. Section 7.4) qui est proportionnelle à Vr/U° . Lorsque B est fini (cf. Fig. 23), comme pour λ , les variations de Vr/U° en fonction de Pr ou de B sont moins nettes. Certains noteront que nous n'avons pas donné dans cette revue les équations des droites $Vr/U^\circ = f(Ra)$ obtenues par simulations numériques 2D à $Pr = 0,71, 2, 4$ et $6,4$ par Ouazzani et al. (1989) [31] et Ouazzani (1991) [134]. En effet, ces droites diffèrent sensiblement des résultats des autres auteurs aux mêmes valeurs de Pr et de B et elles nous paraissent peu fiables (voir à ce sujet Nicolas (1997) [102]).

8. Analyse et stabilité des structures thermoconvectives complexes (1991–2001)

Ces dix dernières années, grâce aux méthodologies sophistiquées qui ont été employées, le couplage entre les R_\perp et les R_{\parallel} a pu être étudié dans les écoulements de PRB. Des structures thermoconvectives complexes (superposition de R_\perp et de R_{\parallel} , structures intermittentes, R_{\parallel} sinueux, R_{\parallel} obliques, etc.) ont pu être identifiées, aussi bien à petits qu'à grands nombres de Rayleigh. Des cartes de stabilité de ces différentes structures ont été établies. À la Section 8.1, nous analysons les diagrammes de transition qui ont été obtenus expérimentalement à partir de mesures d'anémométrie laser-Doppler (LDA) dans l'eau et de visualisations par plans laser dans l'air, en les comparant aux autres résultats de la littérature. À la Section 8.2, nous nous intéressons aux modèles à deux équations d'amplitude couplées qui ont permis d'étudier l'interaction entre les R_\perp et les R_{\parallel} dans les domaines linéaire et faiblement non-linéaire. À la Section 8.3, nous rapportons les études sur la stabilité des R_{\parallel} stationnaires vis à vis de R_{\parallel} sinueux ou inclinés, périodiques en temps et en espace, ainsi que les études à hauts nombres de Rayleigh décrivant la route vers le chaos et les effets non-Boussinesq.

8.1. Analyse comparée des diagrammes de stabilité établis expérimentalement

8.1.1. Présentation générale de ces diagrammes et des travaux récents de Lin et al.

Les mesures par anémométrie laser-Doppler permettent l'acquisition de données très précises sur les champs de vitesse dans les écoulements de PRB. Avec cette technique, Ouazzani (1991) [134] et Ouazzani et al. (1990, 1993, 1995) [32,100,135] effectuent des mesures dans l'eau à $Pr = 6,4$, dans une conduite d'allongement transversal $B = 3,63$, à partir desquelles ils dressent une carte complète de la stabilité des différentes structures thermoconvectives observées (cf. Fig. 24). Auparavant, Ouazzani et al. (1989) [31] avaient réalisé des expériences de visualisation par plans laser dans l'air à $Pr \approx 0,7$ et avec $B = 17,4$, et Ouazzani (1991) [134] avait effectué des mesures par interférométrie différentielle dans l'eau à $Pr = 8,3$ et $B = 3,63$. Toutes ces expériences ont permis de déterminer la courbe de transition entre les R_\perp et les R_{\parallel} présentée à la Fig. 25. Cette figure montre que les R_\perp sont d'autant plus stables vis à vis des R_{\parallel} que Pr est petit. On rappelle que les courbes $Ra_\perp^*(Re)$ calculées par analyse de la stabilité linéaire temporelle (cf. Fig. 5 et Nicolas et al. (2000) [53]), même si elles évoluent qualitativement comme les courbes de la Fig. 25, n'ont rien à voir puisqu'elles prévoient la transition entre l'écoulement de Poiseuille et les R_\perp , et non entre les R_\perp et les R_{\parallel} comme c'est le cas à la Fig. 25. Plus récemment, à partir de visualisations par plans laser, Chang et Lin (1996) [146] et Yu et al. (1997) [128] (équipe de Lin et al.) ont établi la carte de stabilité des écoulements d'air ($Pr \approx 0,7$) dans une conduite d'allongement $B = 12$ qui est présentée à la Fig. 26. Nous allons analyser dans le détail ces diagrammes de transitions à la Section 8.1.2. Nous verrons apparaître trois configurations thermoconvectives particulières en fonction de Ra , Re et B : (1) des effets d'hystéresis entre R_\perp et R_{\parallel} , (2) la superposition des R_\perp et des R_{\parallel} , et (3) des R_{\parallel} qui fusionnent ou se scindent en deux au cours de l'écoulement.

Avant d'analyser ces diagrammes, il nous paraît utile de faire une présentation générale des travaux récents de l'équipe taiwanaise de Lin et de ses collaborateurs. En effet, depuis 1994, cette équipe a publié une série de dix-sept articles sur des résultats de visualisations par plans laser et de simulations numériques directes 3D des écoulements de PRB dans l'air, pour des conduites d'extension latérale $2 \leq B \leq 16$. Ces articles sont : Huang et Lin (1994, 1995, 1996) [122–124], Lin et al. (1996) [125], Lin et Lin (1996, 1997) [111,119,126], Chang et Lin (1996, 1998) [75,146], Chang et al. (1997) [74,127], Yu et al. (1997) [73,128], Yu et Lin (1997) [129], Tseng et al. (2000) [121] et Lir et al. (2001) [83] et Cheng et al. (2002) [82]. Les articles de 1994 à 1996 (excepté [146]) concernent la mesure des transferts thermiques (cf. Section 6.1) et la visualisation des écoulements de R_{\parallel} stationnaires, périodiques et chaotiques (cf. Section 8.3), à $35 \leq Re \leq 1000$, dans des conduites horizontales d'allongement transversal $B = 2$ ou 4 , sauf Huang

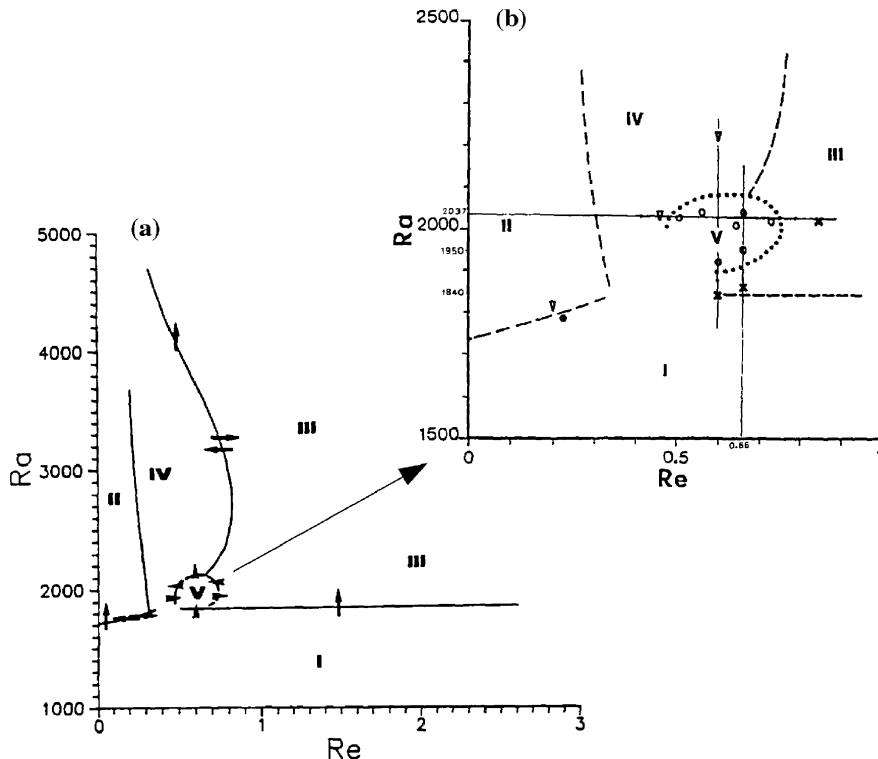


Fig. 24. Domaine d'existence, dans le plan Ra - Re , des différentes configurations d'écoulements identifiées par Ouazzani (1991) [134] dans ses expériences à $Pr = 6,4$ et $B = 3,63$: (a) vue générale (tirée de Ouazzani et al. (1990) [32]) ; (b) zoom sur la zone V (tiré de Ouazzani et al. (1993) [100], Fig. 5) ; I : écoulement de Poiseuille ; II : R_{\perp} stables ; III : R_{\parallel} stables ; IV : R_{\perp} ou R_{\parallel} selon les conditions initiales ; V : structures intermittentes (superposition des R_{\perp} et des R_{\parallel}).

Fig. 24. Existence domain in the plane Ra - Re of the different flow patterns identified by Ouazzani (1991) [134] in his experiments at $Pr = 6,4$ and $B = 3,63$: (a) general view (extracted from Ouazzani et al. (1990) [32]); (b) zoom on zone V (extracted from Ouazzani et al. (1993) [100], Fig. 5. © Kluwer Academic Publishers B.V. Reproduced with kind permission); I: Poiseuille flow; II: stable R_{\perp} ; III: stable R_{\parallel} ; IV: R_{\perp} or R_{\parallel} according to the initial conditions; V: intermittent patterns (superposition of R_{\perp} and R_{\parallel}).

et Lin (1996) [124] et Lin et Lin (1996, 1997) [119,126] qui considèrent le cas d'écoulements à $35 \leq Re \leq 186$ dans des conduites légèrement inclinées. L'article de 1996 [146], les cinq autres articles de 1997 et l'article de 1998 présentent des très belles visualisations expérimentales et numériques des R_{\parallel} , des R_{\perp} et d'autres structures plus complexes ou intermittentes sur lesquelles nous allons revenir aux Sections 8.1.2 et 8.3.1. Ces articles-ci concernent des écoulements à plus petit Re ($2,5 \leq Re \leq 50$) pour des conduites d'allongement $B = 12$, sauf pour Yu et Lin (1997) [129] et Chang et Lin (1998) [75] qui font varier B entre 2 et 12 afin d'étudier l'influence du confinement sur les structures thermoconvectives. L'article de Tseng et al. (2000) [121] concerne des conduites horizontales très légèrement convergentes (cf. Section 6.1). Les articles de Lir et al. (2001) [83] et de Cheng et al. [82] se concentrent sur les très petits nombres de Reynolds ($1 \leq Re \leq 5$), avec $1200 \leq Ra \leq 4000$, dans des conduites d'allongement $B = 16$. Ils montrent des visualisations expérimentales de régimes thermoconvectifs complexes. En particulier, il y est observé des structures en forme de U (la base du U se situant à l'entrée) ou bien des structures transverses à l'entrée, stationnaires ou non, suivies en aval par des R_{\parallel} occupant toute la largeur du canal ou se situant uniquement près des parois verticales.

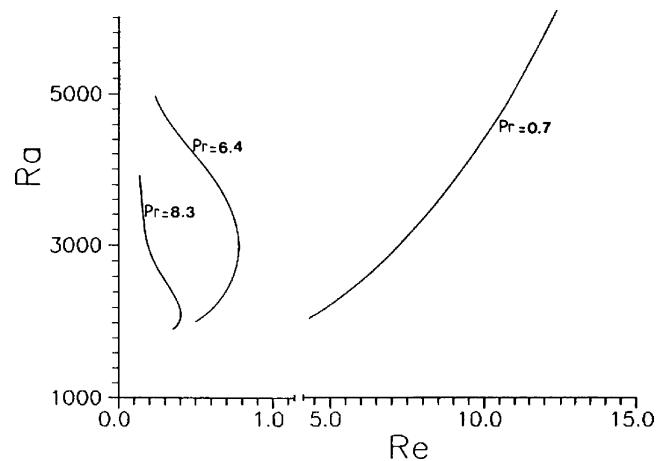


Fig. 25. Courbes de transition entre les R_{\perp} (observés à gauche de chaque courbe) et les R_{\parallel} (observés à droite de chaque courbe) pour des nombres de Prandtl et des allongements transversaux différents : $Pr \approx 0,7$ (air) avec $B = 17,4$; $Pr \approx 6,4$ (eau à 23°C) avec $B = 3,63$; $Pr \approx 8,3$ (eau à 14°C) avec $B = 3,63$ (tiré de Ouazzani (1991) [134]).

Fig. 25. Critical curves between the R_{\perp} (observed on the left of each curve) and the R_{\parallel} (observed on the right of each curve) for different Prandtl numbers and lateral extensions: $Pr \approx 0.7$ (air) with $B = 17.4$; $Pr \approx 6.4$ (water at 23°C) with $B = 3.63$; $Pr \approx 8.3$ (water at 14°C) with $B = 3.63$ (extracted from Ouazzani (1991) [134]).

8.1.2. Fusions et divisions des $R_{\parallel\parallel}$; effets d'hystéresis; superposition des $R_{\perp\perp}$ et des $R_{\parallel\parallel}$

La carte de stabilité dans le plan Ra – Re établie par Ouazzani et al. (1990, 1993) [32,100] à $Pr = 6,4$ et $B = 3,63$ (Fig. 24) permet d'identifier quatre configurations thermoconvectives (zones II à V) lorsque Ra est suffisamment grand, alors que celle de Yu et al. (1997) [128] à $Pr \approx 0,7$ et $B = 12$ (Fig. 26) permet d'en identifier 6 (types 1 à 6). Dans les deux études, pour les petites valeurs de Ra , l'écoulement de Poiseuille purement conductif est stable. Les rouleaux de la zone II et de type 5, pour Re petit et Ra modéré ($Ra < 7000$), sont des $R_{\perp\perp}$ qui restent stables vis à vis de diverses perturbations. Les rouleaux de la zone III et de type 1, pour les valeurs de Re les plus élevées et Ra modéré, sont des $R_{\parallel\parallel}$ stationnaires. Les rouleaux de type 2 sont des $R_{\parallel\parallel}$ instables qui peuvent se diviser ou fusionner plusieurs fois lorsqu'on suit l'écoulement. Cela provoque des oscillations transverses et apériodiques des $R_{\parallel\parallel}$. Ce phénomène a été étudié par Huang et Lin (1995) [123], Chang et al. (1997) [74] et Chang et Lin (1998) [75]. Il est présent principalement dans les conduites de grand allongement ($B \geq 8$) et il s'estompe suffisamment loin en aval de l'entrée, c'est à dire que le nombre de $R_{\parallel\parallel}$ présents dans la conduite finit par se stabiliser vers l'aval. Ces deux raisons expliquent sans doute pourquoi ce phénomène n'est pas observé à la Fig. 24.

Dans la zone IV, Ouazzani et al. (1990, 1993) [32,100] observent soit des $R_{\perp\perp}$, soit des $R_{\parallel\parallel}$, en fonction des conditions initiales. Ce type de comportement n'est pas observé dans la Fig. 26 et, à notre connaissance, de tels effets d'hystéresis ne sont relatés dans la littérature que dans le cas de conduite de faible extension B . C'est le cas pour les expériences de Schröder et Bühl (1995) [145] avec de l'huile de silicium ($Pr = 530$), dans une conduite d'allongement $B = 4,1$. Chen et Lavine (1996) [131] observent aussi ces effets lors de simulations numériques 3D avec $B = 2$ et $Pr = 0,7$. Cependant, dans ce cas, ce comportement semble lié à un artifice numérique : le choix du pas de temps Δt . En utilisant un modèle théorique très simple basé sur deux équations d'amplitudes couplées de type Landau, Brand et al. (1991) [103] arrivent aussi à reproduire des effets d'hystéresis dans le cas d'écoulements de PRB à $Pr \approx 7$ et $B \approx 2$. Cependant, ce modèle phénoménologique est très critiqué (cf. Section 8.2).

Dans la petite zone V de la Fig. 24, la structure de l'écoulement montre un caractère intermittent qui ne correspond ni aux $R_{\perp\perp}$, ni aux $R_{\parallel\parallel}$, mais plutôt à la superposition des deux. La Fig. 27 reproduit, pour cette zone, un enregistrement de la composante verticale de la vitesse W en un point se situant à mi-hauteur de la conduite sur l'axe. Alors que pour les $R_{\perp\perp}$ le signal $W(t)$ en ce point est sinusoïdal de moyenne nulle et que pour les $R_{\parallel\parallel}$ il est constant et de moyenne non nulle, à la Fig. 27, $W(t)$ oscille autour d'une moyenne non nulle, avec une modulation périodique de l'enveloppe des oscillations. Ce signal peut se maintenir plusieurs jours (cf. Fig. 27(a)), et la Fig. 27(b) montre que le déplacement de la sonde de mesure dans la direction y

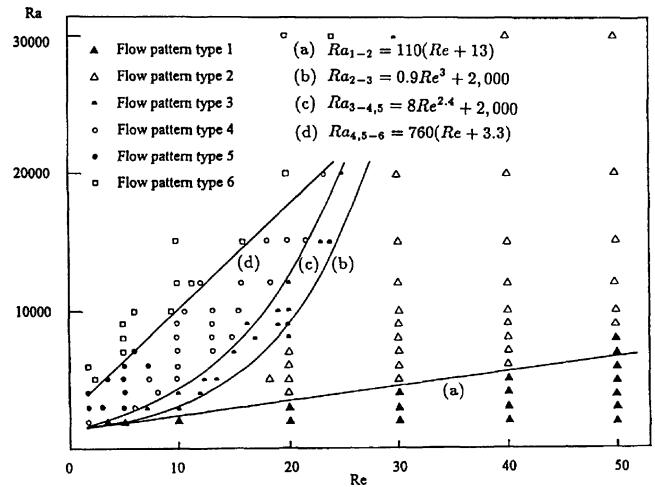


Fig. 26. Diagramme de stabilité des différentes configurations observées expérimentalement par Yu et al. (1997) [128] dans des écoulements de PRB dans l'air ($Pr \approx 0,7$) avec une conduite d'allongement transversal $B = 12$. Six configurations différentes sont identifiées : Type 1 : $R_{\parallel\parallel}$ stables ; Type 2 : $R_{\parallel\parallel}$ instables (avec fusions et divisions des $R_{\parallel\parallel}$) ; Type 3 : transitions entre $R_{\parallel\parallel}$ instables et $R_{\perp\perp}$ situés au centre du canal (cf. Fig. 28(b)) ; Type 4 : écoulement mixte avec coexistence des $R_{\perp\perp}$ et des $R_{\parallel\parallel}$ (cf. Fig. 28(a)) ; Type 5 : $R_{\perp\perp}$ stables ; Type 6 : rouleaux irréguliers non stabilisés ; (tiré de [128]).

Fig. 26. Stability diagram of the different flow patterns observed experimentally by Yu et al. (1997) [128] in PRB flows in air ($Pr \approx 0,7$) with a $B = 12$ transversal aspect ratio duct. Six different flow patterns are identified: Type 1: stable $R_{\parallel\parallel}$; Type 2: unstable $R_{\parallel\parallel}$ (with splitting and merging of the $R_{\parallel\parallel}$); Type 3: transitions between unstable $R_{\parallel\parallel}$ and $R_{\perp\perp}$ located near the duct center (cf. Fig. 28(b)); Type 4: mixed flow with coexistence of $R_{\perp\perp}$ and $R_{\parallel\parallel}$ (cf. Fig. 28(a)); Type 5: stable $R_{\perp\perp}$; Type 6: unsteady irregular rolls; (extracted from [128]).

au temps t^* provoque le changement de signe de la valeur moyenne de W (comme dans le cas des $R_{\parallel\parallel}$). Ces structures n'ont jamais été visualisées (par plans laser par exemple) par Ouazzani et al. (1990, 1993) [32,100]. Cependant, certains résultats récents de la littérature, accompagnés de visualisations, semblent retrouver de tels signaux. Par exemple, pour une valeur de B similaire ($B = 4,1$), mais pour des valeurs de Ra et de Pr très différentes ($Ra = 14600$, $Pr = 530$), Schröder et Bühl (1995) [145] présentent des nappes de la composante verticale de la vitesse dont il est possible d'extraire un signal sinusoïdal de moyenne non nulle qui ressemble à celui de la Fig. 27. Dans le cas d'écoulements d'air ($Pr = 0,71$) à $Re = 10$ et pour $4000 \leq Ra \leq 5000$, Chang et Lin (1996) [146], Chang et al. (1997) [127] et Yu et al. (1997) [128] (pour $B = 12$), Yu et Lin (1997) [129] (pour $B = 4, 5, 6, 7, 8, 9$ et 12) et Nobile et Onesti (1996) [81] (pour $B = 10$) visualisent expérimentalement ou numériquement, dans la zone d'entrée thermique, une structure mixte où coexistent des $R_{\parallel\parallel}$, situés le long des bords latéraux de la conduite, et des $R_{\perp\perp}$, situés au centre de la conduite, qui disparaissent au profit des $R_{\parallel\parallel}$ vers l'aval (cf. Fig. 28). Les structures de la Fig. 28(b) correspondent aux structures de type 3 dans la Fig. 26 (les $R_{\perp\perp}$ sont à peine présents et ils sont intermittents). Les structures du type 4 sont semblables à celles du type 3, cependant les $R_{\perp\perp}$ sont mieux formés au

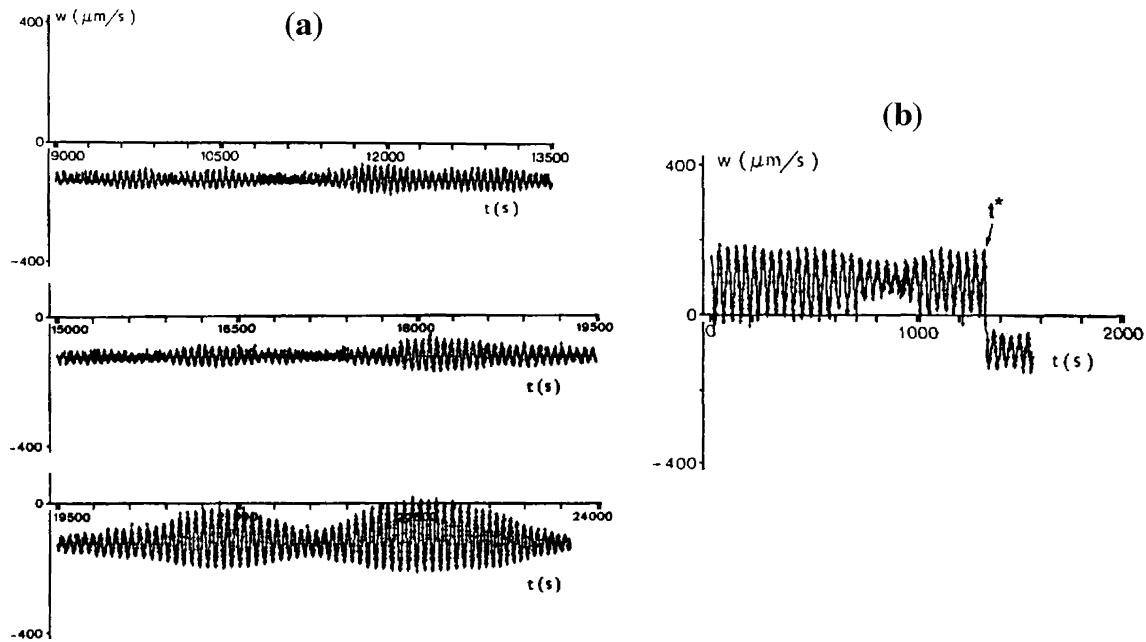


Fig. 27. (a) Extrait d'un enregistrement sur plusieurs jours des structures intermittentes de la zone V de la Fig. 24 ; $B = 3,63$, $Pr = 6,4$, $Re = 0,56$ et $Ra = 2037$ (tiré de Ouazzani (1991) [134]). (b) Périodicité dans la direction transversale mise en évidence par le déplacement selon y de la sonde à $t = t^*$; $B = 3,63$, $Pr = 6,4$, $Ra = 2012$ et $Re = 0,63$ (tiré de Ouazzani et al. (1993) [100], Figs. 6c et 7).

Fig. 27. (a) Extract of a several day recording of the intermittent patterns of the zone V of Fig. 24; $B = 3.63$, $Pr = 6.4$, $Re = 0.56$ and $Ra = 2037$ (extracted from Ouazzani (1991) [134]). (b) Periodicity in the transversal direction shown by the y moving of the probe at $t = t^*$; $B = 3.63$, $Pr = 6.4$, $Ra = 2012$ and $Re = 0.63$ (extracted from Ouazzani et al. (1993) [100], Figs. 6c and 7). © Kluwer Academic Publishers B.V. Reproduced with kind permission).

centre de la conduite (cf. Fig. 28(a)). Il est tentant de supposer que les structures de type 3 donnent un signal similaire à celui de la Fig. 27, d'autant plus qu'une analyse approfondie de la thèse de Ouazzani (1991) [134] semble confirmer que ce signal a été enregistré aussi dans la zone d'entrée thermique. A la Fig. 26, la zone de type 3–4 est beaucoup plus étendue que la zone V de la Fig. 24. Cela peut sans doute s'expliquer par le fait que les observations de Yu et al. (1997) [128] (voir aussi Chang et Lin (1996) [146]) sont faites à l'entrée de la conduite (leur domaine d'étude a un allongement axial $A = 15$), tandis que les mesures de Ouazzani et al. (1990, 1993) [32,100] sont effectuées au-delà de $x = 15$ dans une conduite d'allongement $A = 28$: dans ce cas, au point de mesure, les R_{\perp} au centre de la conduite ont laissé la place aux $R_{//}$ sauf lorsque Ra est petit. Nous verrons au Section 8.2 que les modèles basés sur deux équations d'amplitude couplées mettent aussi en évidence l'existence de zones où les R_{\perp} et les $R_{//}$ se superposent (cf. Brand et al. (1991) [103], Müller et al. (1993) [104] et Kato et Fujimura (2000) [54]). Pour terminer en ce qui concerne la Fig. 26, les structures thermoconvectives de type 6 observées à hauts nombres de Rayleigh et bas nombres de Reynolds sont des structures irrégulières et chaotiques (nous y reviendrons à la Section 8.3.2).

Chiu et al. (1987) [147] ont analysé par LDA les champs de vitesse dans les $R_{//}$ stationnaires qui apparaissent pour $Re > 20$ dans des écoulements d'azote ($Pr \approx 0,7$) dans une conduite d'allongement $B = 10$. Suite à cette étude, Chiu et Rosenberger (1987) [117] observent que ces $R_{//}$ station-

naires deviennent instationnaires et sinueux (« snaking ») aux petites valeurs de Re ($Re < 20$) à cause, selon l'hypothèse des auteurs, de la superposition des R_{\perp} . A partir de ces observations, Chiu et Rosenberger (1987) [117] dessinent dans le plan $Ra-Re$ une courbe de transition entre les $R_{//}$ instationnaires et les $R_{//}$ stationnaires. Cette courbe se situe assez nettement en dessous de la courbe à $Pr = 0,7$ de la Fig. 25 et de la courbe (b) de la Fig. 26, puisqu'elle passe par les points $(Ra; Re) \approx (2000; 5)$ et $(8000, 40)$.

8.2. Analyses théoriques utilisant deux équations d'amplitude couplées

Nous avons vu à la Section 5.3, suite à l'analyse de Carrière et Monkewitz (1999) [69], que les résultats sur l'instabilité absolue des $R_{//}$ obtenus à partir de modèles à deux équations d'amplitude couplées par Brand et al. (1991) [103], Müller et al. (1993) [104] et Tveitereid et Müller (1994) [105], dans le cas d'écoulements de PRB entre deux plaques infinies, sont erronés à cause d'une utilisation de ces équations en dehors de leur domaine de validité. Malgré cela, nous allons nous intéresser au travail de Müller et al. (1993) [104] car : (1) leurs équations de Ginzburg–Landau sont dérivées de manière rigoureuse à partir des équations de Navier–Stokes ; (2) leur modèle fournit de manière simple une bonne idée des interactions possibles entre les R_{\perp} et les $R_{//}$; (3) on peut supposer que dans le domaine où les $R_{//}$ sont convectivement instables selon cette

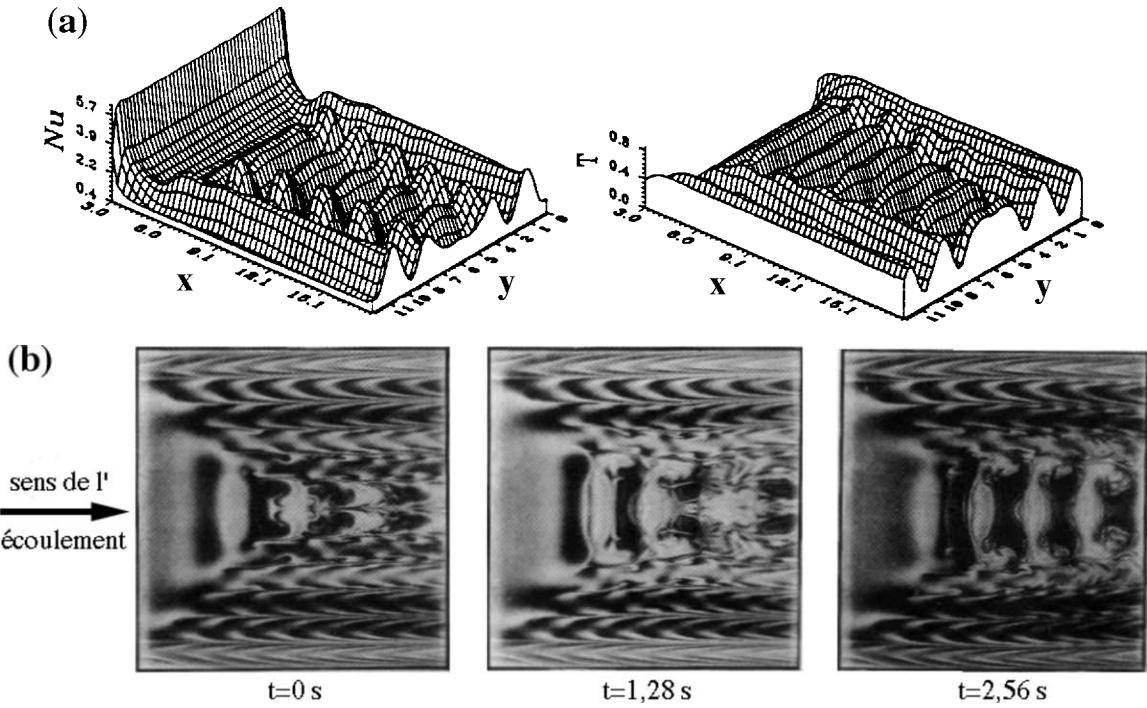


Fig. 28. Visualisation des régimes d'écoulements avec superposition des R_{\parallel} (situés le long des bords latéraux) et des R_{\perp} (situés au centre de la conduite) : (a) Nappes de Nu (en $z = 0$) et de T (en $z = 0,5$), obtenues par simulation numérique 3D pour $Ra = 4200$, $Re = 10$, $Pr = 0,71$ et $B = 12$ (tiré de Chang et al. (1997) [127]) ; (b) Écoulement intermittent visualisé par un plan laser en $z = 0,5$ dans de l'air avec de la fumée (vue de dessus), à trois instants différents et pour $Ra = 4000$, $Re = 10$, $Pr \approx 0,7$ et $B = 12$ (tiré de Yu et al. (1997) [128]).

Fig. 28. Visualization of the flow patterns with superposition of the R_{\parallel} (located near the lateral walls) and the R_{\perp} (located at the center of the duct): (a) maps of Nu (at $z = 0$) and of T (at $z = 0,5$), obtained from 3D numerical simulations at $Ra = 4200$, $Re = 10$, $Pr = 0,71$ and $B = 12$ (extracted from Chang et al. (1997) [127]); (b) Intermittent flow visualized by a laser sheet at $z = 0,5$ in air with smoke particles (top view), at three different instants for $Ra = 4000$, $Re = 10$, $Pr \approx 0,7$ and $B = 12$ (extracted from Yu et al. (1997) [128]).

théorie, les comportements observés demeurent valables. Par contre, nous ne développerons pas le travail de Brand et al. (1991) [103]. En effet, ils ont utilisé un modèle phénoménologique de type Landau dans lequel il apparaît que les paramètres de couplage entre les deux équations d'amplitudes ont été choisis de manière inappropriée (cf. Müller et al. (1993) [104]). Nous reviendrons sur l'étude de Tveitereid et Müller (1994) [105] un peu plus loin.

Les équations de Ginzburg-Landau établies rigoureusement par Müller et al. (1993) [104] s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_0^{\perp} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{\perp} \frac{\partial}{\partial x} \right) A_{\perp} \\ = \left[\chi_{\perp} (1 + i c_0) + \xi_{\perp}^2 (1 + i c_1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right. \\ \quad \left. - (1 + i c_2) |A_{\perp}|^2 - \delta_{\perp} (1 + i c_3) |A_{\parallel}|^2 \right] A_{\perp} \\ \tau_0^{\parallel} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{\parallel} \frac{\partial}{\partial x} \right) A_{\parallel} \\ = \left[\chi_{\parallel} + \xi_{\parallel}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma_{\parallel} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right. \\ \quad \left. - \lambda_{\parallel} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - |A_{\parallel}|^2 - \delta_{\parallel} |A_{\perp}|^2 \right] A_{\parallel} \end{array} \right. \quad (21)$$

où $A_{\perp}(x, t)$ et $A_{\parallel}(x, t)$ représentent respectivement les amplitudes des R_{\perp} et des R_{\parallel} et où le dernier terme de chaque équation représente le couplage entre R_{\perp} et R_{\parallel} . Le système (21) modélise l'interaction entre les R_{\perp} et les R_{\parallel} dans une conduite où il n'y a pas d'adhérence sur les parois latérales verticales. Ce cas correspond aussi à une conduite infinie dans les deux directions horizontales. On a donc $Re^* = 0$. Pour éviter cela et se rapprocher des conditions expérimentales, Müller et al. (1993) [104] imposent artificiellement dans les équations (21) des seuils de stabilité linéaire Ra_{\perp}^* et Ra_{\parallel}^* qui se coupent en $Re^* \approx 0,5$ (Ra_{\perp}^* et Ra_{\parallel}^* interviennent dans χ_{\perp} et χ_{\parallel} : on a $\chi_{\perp} = Ra - Ra_{\perp}^*$ et $\chi_{\parallel} = Ra - Ra_{\parallel}^*$). Plus précisément, ils imposent $\varepsilon_{\perp}^* = 0,07 Re^2$ et $\varepsilon_{\parallel}^* = 0,02$ (soit $Ra_{\parallel}^* = 1742$). De cette manière, ils se placent quasiment dans les conditions expérimentales de Ouazzani et al. (1990, 1993) [32,100] puisque, dans ses expériences, $Re^* \approx 0,5$ et $Ra_{\parallel}^* = 1840$. De plus, les coefficients des équations d'amplitude sont calculés pour $Pr = 5,8$ (cf. Tableau 4), au lieu de $Pr = 6,4$ dans les expériences.

Le diagramme de stabilité résultant du modèle (21) est reproduit à la Fig. 29 (on gardera en mémoire les critiques de Carrière et Monkewitz (1999) [69] mentionnées plus haut). Ce diagramme donne les courbes de stabilité dans le plan (ε, Re) . Lorsque $\varepsilon_{\perp}^* < \varepsilon < \varepsilon_{\perp}^{\text{conv}}$ (respectivement, $\varepsilon_{\parallel}^* <$

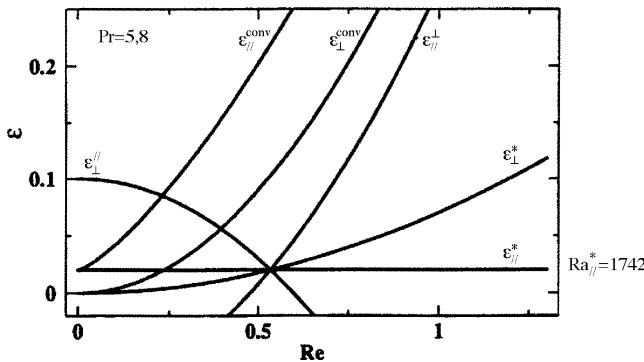


Fig. 29. Diagramme des stabilités convectives et absolues des R_{\perp} et des R_{\parallel} dans le plan (ϵ , Re), établi à partir d'un modèle basé sur deux équations de Ginzburg-Landau couplées, pour $Pr = 5.8$ et $Re^* \approx 0.5$ (voir le texte pour les explications) (tiré de Müller et al. (1993) [104]).

Fig. 29. Diagram of the convective and absolute stabilities of the R_{\perp} and the R_{\parallel} in the plane (ϵ , Re), established from a model based on two coupled Ginzburg-Landau equations, for $Pr = 5.8$ and $Re^* \approx 0.5$ (see text for the explanations) (extracted [104] H.W. Müller, M. Tveitereid, S. Trainoff, Physical Review E 48 (1993) 263–272. Copyright 1993 by the American Physical Society).

$\epsilon < \epsilon_{\parallel}^{\text{conv}}$), l'écoulement de Poiseuille conductif devient convectivement instable vis à vis des R_{\perp} (respectivement, des R_{\parallel}). Lorsque $\epsilon > \epsilon_{\perp}^{\text{conv}}$ (respectivement, $\epsilon > \epsilon_{\parallel}^{\text{conv}}$), l'écoulement de Poiseuille devient absolument instable vis à vis des R_{\perp} (respectivement, des R_{\parallel}). Enfin, pour $\epsilon < \epsilon_{\perp}^{\parallel}$, un écoulement de R_{\parallel} stationnaires devient instable vis à vis des R_{\perp} , et pour $\epsilon < \epsilon_{\parallel}^{\perp}$, un écoulement de R_{\perp} uniformes devient instable vis à vis des R_{\parallel} (nous renvoyons à l'article pour savoir comment ces dernières transitions ont été déterminées). On constate que la courbe $\epsilon_{\parallel}^{\perp}$ se compare favorablement à la transition entre les zones III et IV de la Fig. 24. Cependant, à la différence de Brand et al. (1991) [103], Müller et al. (1993) n'observent jamais d'effet d'hystérésis. Pour $\epsilon > \epsilon_{\perp}^{\parallel}$ et $\epsilon > \epsilon_{\parallel}^{\perp}$, ils montrent qu'il peut y avoir un régime transitoire où coexistent en différents endroits de la conduite des R_{\perp} et des R_{\parallel} (cf. Fig. 30(a)). Un tel régime transitoire est photographié dans des écoulements d'air avec de la fumée par Lir et al. (2001) [83] et un autre, ne présentant qu'un seul front, est photographié par Chang et al. (1997) [127]. Comme on peut le voir à la Fig. 30(b), en imposant un forçage à l'entrée de la conduite de manière à ce que les structures de nature convective puissent se développer, une structure mixte assimilable aux superpositions de R_{\perp} et de R_{\parallel} décrites à la Section 8.1.2 est observée localement dans l'entrée, pour des paramètres de l'écoulement proches de $\epsilon_{\parallel}^{\perp}$.

Tveitereid et Müller (1994) [105] ont quant à eux étudié la stabilité convective et absolue des R_{\perp} et des R_{\parallel} à l'aide des équations (21) linéarisées. Ils restent dans le cas d'écoulements de PRB entre deux plaques infinies (i.e., $Re^* = 0$). Ils montrent cependant qu'il existe un deuxième nombre de Reynolds critique Re^+ , correspondant à l'intersection des courbes de transition $\epsilon_{\perp}^{\text{conv}}$ et $\epsilon_{\parallel}^{\text{conv}}$.

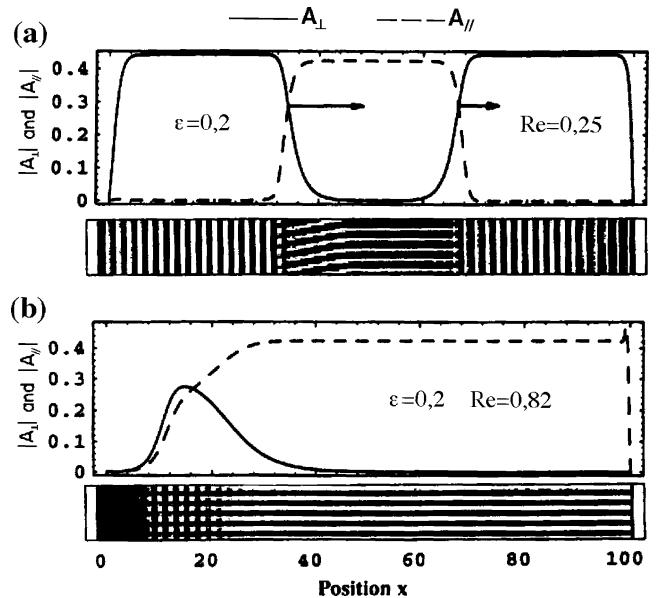


Fig. 30. Evolution axiale des enveloppes des R_{\perp} et des R_{\parallel} obtenues à partir d'un modèle basé sur deux équations de Ginzburg-Landau couplées, et représentation simple des structures correspondantes de l'écoulement : (a) régime transitoire avec propagation de fronts, où coexistent des R_{\perp} et des R_{\parallel} en différents endroits de la conduite ; $\epsilon = 0.2$, $Re = 0.25$ et $Pr = 5.8$; (b) régime permanent avec superposition des R_{\perp} et des R_{\parallel} à l'entrée de la conduite ; $\epsilon = 0.2$, $Re = 0.82$ et $Pr = 5.8$ (d'après Müller et al. (1993) [104]).

Fig. 30. Axial evolution of the R_{\perp} and R_{\parallel} envelops obtained from a model based on two coupled Ginzburg-Landau equations, and simple representation of the corresponding flow patterns: (a) unsteady pattern with propagation of fronts and coexistence of the R_{\perp} and the R_{\parallel} in different places of the duct; $\epsilon = 0.2$, $Re = 0.25$ and $Pr = 5.8$; (b) steady flow with superposition of the R_{\perp} and the R_{\parallel} at the duct entrance; $\epsilon = 0.2$, $Re = 0.82$ and $Pr = 5.8$ (extracted [104] H.W. Müller, M. Tveitereid, S. Trainoff, Physical Review E 48 (1993) 263–272. Copyright 1993 by the American Physical Society).

Ce résultat étant vraisemblablement erroné (cf. Carrière et Monkewitz (1999) [69]), nous ne le développerons pas ici.

Les études de stabilité linéaire temporelles en conduites d'extension latérale finie [52–54] prédisent que l'écoulement de base devient instable vis à vis soit des R_{\perp} , soit des R_{\parallel} (cf. Section 4.2.3 et Annexe A.2). Cependant, au voisinage du point triple $(Ra, Re) = (Ra_{\parallel}^*, Re^*)$ où coexistent R_{\perp} et R_{\parallel} (cf. Fig. 5), la théorie linéaire n'est plus capable de prédire le type de structure qui apparaît au-dessus du seuil de transition car l'interaction non-linéaire entre les deux modes joue un rôle significatif dans le processus de sélection de la structure thermoconvective. Les expériences montrent en effet que cette interaction peut produire des structures mixtes avec superposition de R_{\perp} et de R_{\parallel} (cf. Section 8.1.2). Dans ce cadre là, afin d'étudier l'interaction faiblement non-linéaire temporelle (et non spatio-temporelle) entre R_{\perp} et R_{\parallel} , Kato et Fujimura (2000) [54] dérivent deux équations d'amplitudes couplées (une pour les R_{\perp} , l'autre pour les R_{\parallel}) autour du point triple $(Ra, Re) = (Ra_{\parallel}^*, Re^*)$. Ces équations sont établies après avoir déterminé les paramètres critiques Ra_{\parallel}^* , Ra_{\perp}^* et Re^* par ana-

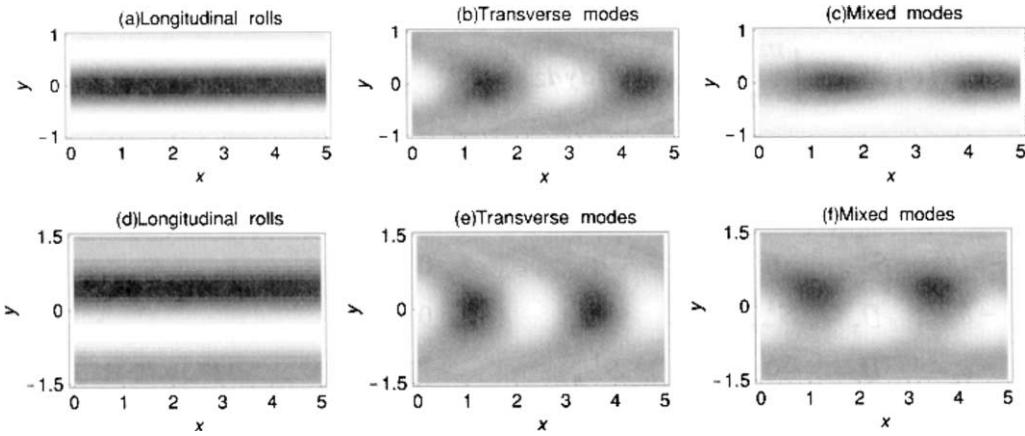


Fig. 31. Visualisation dans des plans horizontaux à mi-hauteur du canal des perturbations de température (noir = froid, blanc = chaud) pour les trois types de structures thermoconvectives susceptibles d'être observées près du point triple $(Ra, Re) = (Ra_{\parallel}^*, Re^*)$, d'après une théorie faiblement non-linéaire basée sur deux équations d'amplitude couplées : (a), (d) : R_{\parallel} ; (b), (e) : R_{\perp} ; (c), (f) : structures mixtes pour $D_a/D_b = 7/3$. Cas de conduites d'allongement transversal $B = 2$ ((a)–(c)) et $B = 3$ ((d)–(f)), avec des parois latérales parfaitement conductrices et pour $Pr = 7$ (tiré de Kato et Fujimura (2000) [54]).

Fig. 31. Visualisation on the horizontal mid-planes $z = h/2$ of the temperature disturbances (lighter shades = hot and darker shades = cold) for the three types of thermoconvective patterns that are liable to appear in the neighborhood of the critical point $(Ra, Re) = (Ra_{\parallel}^*, Re^*)$ according to a weakly non-linear theory based on two coupled amplitude equations: (a), (d): R_{\parallel} ; (b), (e): R_{\perp} ; (c), (f): mixed modes with $D_a/D_b = 7/3$. Case of ducts with transversal aspect ratio $B = 2$ ((a)–(c)) and $B = 3$ ((d)–(f)), with perfectly conducting side walls and for $Pr = 7$ (extracted from [54] Y. Kato, K. Fujimura, Physical Review E 62 (2000) 601–611. Copyright 2000 by the American Physical Society).

lyse de stabilité linéaire temporelle 3D et sans introduire de modèle pour prendre en compte l'effet des parois latérales (contrairement à Brand et al. (1991) [103] et Müller et al. (1993) [104]). L'étude est menée pour une large gamme de nombres de Prandtl ($0,001 \leqslant Pr \leqslant 1000$), pour $B = 1, 2, 3$ et 4, et prend en compte des parois latérales adiabatiques ou parfaitement conductrices. A l'ordre le plus bas (termes cubiques), ces deux équations d'amplitude s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{dA_{\parallel}}{dt} + [-a_0 + a_1 A_{\parallel}^2 + a_2 A_{\perp}^2] A_{\parallel} = 0 \\ \frac{dA_{\perp}}{dt} + [-b_0 + b_1 A_{\perp}^2 + b_2 A_{\parallel}^2] A_{\perp} = 0 \end{cases} \quad (22)$$

où $A_{\parallel}(t)$ et $A_{\perp}(t)$ représentent respectivement les amplitudes réelles des perturbations de température pour les modes longitudinaux et transversaux. Les coefficients réels a_i et b_i ($i = 0, 1, 2$) sont calculés numériquement pour différentes valeurs de B et de Pr (cf. [54]). Le système d'équations (22) a quatre solutions d'équilibre (indépendantes du temps) : (i) la solution triviale $A_{\parallel} = A_{\perp} = 0$ qui représente l'écoulement de Poiseuille purement conductif; (ii) les R_{\parallel} : $A_{\parallel} = \sqrt{a_0/a_1}$ et $A_{\perp} = 0$; (iii) les R_{\perp} : $A_{\parallel} = 0$ et $A_{\perp} = \sqrt{b_0/b_1}$; et (iv) les structures mixtes : $A_{\parallel} = \sqrt{D_a/D}$ et $A_{\perp} = \sqrt{D_b/D}$, où $D_a = a_2 b_0 - a_0 b_1$, $D_b = a_0 b_2 - a_1 b_0$ et $D = a_2 b_2 - a_1 b_1$. On reproduit sur la Fig. 31, dans des plans horizontaux à mi-hauteur du canal, les trois configurations non triviales obtenues par cette analyse. A cause des effets d'adhérence aux parois latérales, et comme cela a déjà été montré dans les références [52,53], les R_{\perp} se courbent et prennent la forme de fer à cheval. La structure mixte qui est représentée pour $B = 2$ ressemble aux R_{\parallel} oscillants en opposition de phase dont il sera question à la Section 8.3.1. Dans la dernière partie de leur article, Kato et

Fujimura (2000) [54] analysent, en fonction de Pr et de B , la stabilité des quatre configurations d'équilibre possible autour du point triple. De manière simplifiée (nous renvoyons à l'article pour avoir l'ensemble des résultats), les auteurs montrent que, pour $0,71 \leqslant Pr \leqslant 1000$ et $1 \leqslant B \leqslant 4$, les seules configurations thermoconvectives stables autour du point triple sont les R_{\parallel} et les R_{\perp} , et que les R_{\perp} peuvent être stables dans un domaine sous-critique : pour $Re \leqslant Re^*$ et $Ra \leqslant Ra_{\parallel}^*$. Ils montrent aussi que les structures mixtes sont stables uniquement pour $Pr \leqslant 0,1$ et $B \approx 1$.

Signalons pour terminer que l'interaction non-linéaire entre des structures convectives transverses et longitudinales a aussi été étudiée à partir d'équations d'amplitudes couplées par Fujimura et Kelly (1993) [148] dans des conduites d'axe incliné par rapport à l'horizontale, et par Fujimura et Kelly (1995) [149] dans des écoulements de type PRB à grand nombre de Reynolds (interaction des ondes de Tollmien–Schlichting et des R_{\parallel}). Li et al. (1997) [106], quant à eux, ont analysé à l'aide d'une seule équation d'amplitude le développement des structures sinusoïdales oscillant à haute ou à basse fréquence dans les écoulements de PRB cisaillés par le déplacement transversal oscillatoire de la plaque du bas.

8.3. Transitions des R_{\parallel} vers des structures périodiques et chaotiques

8.3.1. Transitions des R_{\parallel} vers des structures périodiques en temps et en espace

On vient de voir à la Section 8.1 que les structures d'écoulement avec superposition de R_{\perp} et de R_{\parallel} , ou avec fusion et division des R_{\parallel} , ne sont présentes qu'au début de la zone chauffée et donc que l'on retrouve des R_{\parallel}

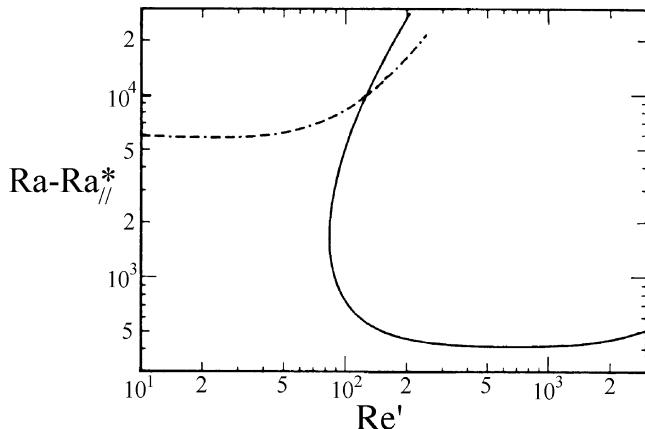


Fig. 32. Diagramme de stabilité linéaire temporelle des R_{\parallel} stationnaires dans le plan $Ra-Re$ à $Pr = 0,7$ et $B \rightarrow \infty$. Les R_{\parallel} deviennent instables vis à vis des rouleaux longitudinaux sinueux présentés à la Fig. 33 pour $Ra > Ra_{\parallel}^{*II}$, c'est à dire au-dessus et à droite des courbes pointillées et continues. Ce diagramme de stabilité est séparé en deux zones : l'une à gauche et l'autre à droite du nombre de Reynolds critique $Re'^{*II} \approx 100$ (tiré de Clever et Busse (1991) [150]).

Fig. 32. Temporal linear stability diagram of the steady R_{\parallel} in the plane $Ra-Re$ at $Pr = 0,7$ and $B \rightarrow \infty$. The R_{\parallel} become unstable versus the wavy longitudinal rolls shown on Fig. 33 for $Ra > Ra_{\parallel}^{*II}$, i.e., above and to the right of the solid and the double dash-dotted lines. This stability diagram is cut in two zones: one to the left and the other to the right of the critical Reynolds number $Re'^{*II} \approx 100$ (extracted from Clever and Busse (1991) [150] © Cambridge University Press. Reproduced with permission).

stationnaires parfaitement établis plus loin vers l'aval. Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux structures secondaires qui apparaissent lorsque les R_{\parallel} parfaitement établis sont déstabilisés. Une analyse théorique et numérique de la stabilité linéaire temporelle de ces R_{\parallel} stationnaires, pris comme écoulement de base et soumis à des perturbations 3D, est effectuée par Clever et Busse (1991) [150] dans le cas d'un écoulement entre deux plaques infinies sous l'hypothèse de Boussinesq. Des diagrammes de stabilité de cet écoulement de base vis à vis de différents types d'instabilités secondaires sont établis pour $Pr = 0,025, 0,1, 0,7, 2,5$ et 7 (cf. Fig. 32 pour $Pr = 0,7$). Pour $Pr = 7$, les R_{\parallel} stationnaires deviennent instables vis à vis d'une instabilité dite « knot instability » (cf. Busse et Clever (1979) [151]) pour un nombre de Rayleigh critique secondaire $Ra_{\parallel}^{*II}(Re')$ compris entre 20000 et 30000 , quel que soit $0 < Re' \leq 1000$ (où Re' est le nombre de Reynolds basé sur la vitesse maximale). Pour $Pr \leq 2,5$ et Ra suffisamment grand, Clever et Busse (1991) [150] trouvent que les R_{\parallel} deviennent instables vis à vis de structures longitudinales oscillant en phase, appelées « wavy instability ». Un exemple en est donné à la Fig. 33. Les diagrammes de stabilité entre les R_{\parallel} stationnaires et les R_{\parallel} ondulés ont toujours une allure similaire à celle de la Fig. 32, quel que soit $Pr \leq 2,5$. Notamment, les valeurs du nombre de Rayleigh critique $Ra_{\parallel}^{*II}(Re', Pr)$ pour $Re' \lesssim Re'^{*II} \approx 100$ sont très supérieures à celles pour $Re' \gtrsim Re'^{*II}$. Cependant, alors que la valeur de Re'^{*II} varie très peu en fonction de Pr (quel que soit $Pr \leq 2,5$), la valeur critique ($Ra_{\parallel}^{*II} - 1708$

varie beaucoup car elle est proportionnelle à Pr . Bien que l'analyse de la stabilité linéaire temporelle de Clever et Busse (1991) [150] ne prennent en compte que le caractère convectif de l'instabilité secondaire, et pas le caractère absolu, nous allons confronter le diagramme de stabilité de la Fig. 32 aux résultats numériques et expérimentaux de la littérature qui s'en rapprochent.

A notre connaissance, il n'existe pas de résultat expérimental ou numérique permettant de confirmer le résultat théorique de Clever et Busse (1991) [150] à $Pr \approx 7$. Par contre, pour les écoulements à $Pr \approx 0,7$ (air, azote, etc.), de nombreux travaux décrivent des structures longitudinales « instables », « instationnaires » ou « sinueuses » (« snaking ») ou des instabilités secondaires périodiques en temps et en espace, pour $Ra > 5000$ et $Re < 100$ (c'est à dire pour le quart supérieur gauche de la Fig. 32). Cependant, bien souvent, ces structures ne ressemblent pas à celles de la Fig. 33, ou bien, elles ne sont pas décrites de manière suffisamment précise. Par exemple, Ostrach et Kamotani (1975) [58] observent des « R_{\parallel} instables et irréguliers » pour $Ra > 8000$, $10 < Re < 100$ et $13 \leq B \leq 30$; Nyce et al. (1992) [22], à partir de mesures de vitesse par LDA dans l'azote, décrivent « deux R_{\parallel} asymétriques et instationnaires » pour $Ra = 22000$, $Re = 18,75$ et $B = 2$; Avsec (1937) [46] et Avsec et Luntz (1937) [48] ont bien photographié des rouleaux de forme ondulée du type de ceux de la Fig. 33, mais leur dispositif expérimental n'étant pas décrit précisément et les paramètres de l'écoulement n'étant pas fournis, il n'est pas possible d'effectuer de comparaison avec Clever et Busse (1991) [150].

Dans plusieurs autres études, on observe des R_{\parallel} sinueux oscillant *en opposition de phase*, de manière symétrique par rapport à l'axe de la conduite, et ayant une section qui varie périodiquement en temps et en espace. C'est le cas dans les simulations numériques effectuées dans le cadre de l'approximation de Boussinesq par Yu et Lin (1997) [129] à $Re = 10$, $5000 \leq Ra \leq 7000$ et $B = 5$ (cf. Fig. 34) et par Nobile et Onesti (1996) [81] à $Re = 10$, $Ra = 5300$ et $B = 10$. Spall (1996) [18] (cf. Section 2.1.2 et Tableau 1), à $Ra = 130700$, $Re = 25$ et $B = 4$, observe un R_{\perp} stationnaire à l'entrée sur la plaque chauffée suivi par quatre R_{\parallel} stationnaires parfaitement établis vers l'aval; mais, à $Re = 10$, il présente une séquence de huit images prises à des instants différents montrant que les quatre R_{\parallel} sont devenus instationnaires périodiques et qu'ils oscillent en opposition de phase dans le plan horizontal, de manière symétrique par rapport à l'axe de la conduite. Chang et Lin (1998) [75] montrent aussi des photographies de ce type d'écoulements à partir de visualisation par plans laser dans l'air pour des conduites de petits rapports de forme ($B \leq 6$). Pour $B = 2$ et 4 , ils établissent les diagrammes de la Fig. 35 donnant la transition entre les R_{\parallel} stationnaires et ces rouleaux sinueux périodiques en temps. Pour $B \geq 8$, Chang et Lin (1998) [75] décrivent des écoulements dont la stabilité suit le diagramme de la Fig. 26, c'est à dire, notamment, que les R_{\parallel} sont beaucoup plus instables



Fig. 33. Représentation des isothermes dans le plan $z = 0,5$ des rouleaux longitudinaux sinueux qui apparaissent pour $Ra > Ra_{\parallel}^{*II}$ et $Re > Re'^{*II}$ à la Fig. 32. Les valeurs des paramètres sont $Pr = 0,71$, $Ra = 3000$, $Re' = 200$ et $B \rightarrow \infty$. L'écoulement moyen va de droite à gauche (tiré de Clever et Busse (1991) [150]).

Fig. 33. Representation of the isotherms in the plane $z = 0.5$ of the wavy longitudinal rolls which appear for $Ra > Ra_{\parallel}^{*II}$ and $Re > Re'^{*II}$ in Fig. 32. The parameter values are $Pr = 0.71$, $Ra = 3000$, $Re' = 200$ and $B \rightarrow \infty$. The average flow goes from the right to the left (extracted from Clever and Busse (1991) [150] © Cambridge University Press. Reproduced with permission).

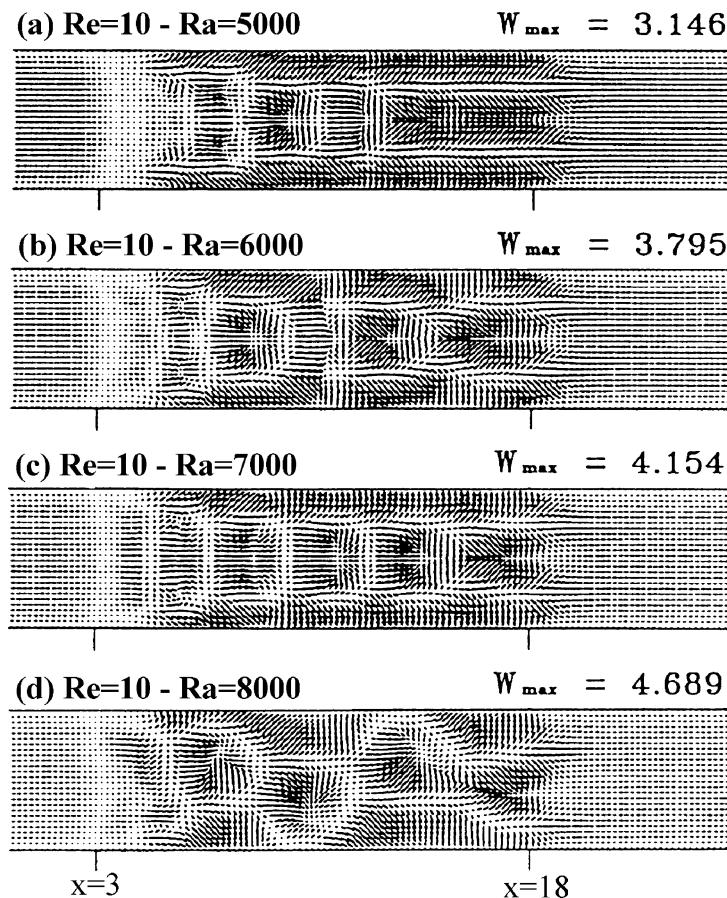


Fig. 34. Champ de vecteurs vitesses dans le plan horizontal $z = 0,766$, pour un écoulement de PRB à $Pr = 0,71$ et $Re = 10$, dans une conduite d'allongement transversal $B = 5$ chauffée uniformément par le bas entre $x = 3$ et $x = 18$; (a) $Ra = 5000$, (b) $Ra = 6000$, (c) $Ra = 7000$, (d) $Ra = 8000$ (tiré de Yu et lin (1997) [129]).

Fig. 34. Velocity vector maps in the horizontal plane $z = 0.766$, for a PRB flow at $Pr = 0.71$ and $Re = 10$, in a $B = 5$ transversal aspect ratio duct uniformly heated from below between $x = 3$ and $x = 18$; (a) $Ra = 5000$, (b) $Ra = 6000$, (c) $Ra = 7000$, (d) $Ra = 8000$ (extracted from Yu et lin (1997) [129] Copyright 1997 from *effects of aspect ratio on vortex flow patters in mixed convection of air through a bottom heated horizontal rectangular duct* by C.H. Yu and T.F. Lin. Reproduced by permission of Taylor & Francis, Inc., <http://www.routledge-ny.com>).

(présence de fusions et de divisions) que lorsque $B \leq 6$. Les structures instationnaires périodiques dont il est question à la Fig. 35 pourraient être assimilées à la superposition des R_{\perp} et des R_{\parallel} de type 3 et 4 de la Fig. 26. Cependant, les structures intermittentes de la Fig. 35 se maintiennent

tout le long de la zone chauffée alors qu'à la Fig. 26 elles disparaissent vers l'aval au profit des seuls R_{\parallel} stationnaires. On constate aussi que les R_{\parallel} stationnaires de la Fig. 35 deviennent instables dans un domaine beaucoup plus réduit que celui du diagramme de Clever et Busse à la Fig. 32 :

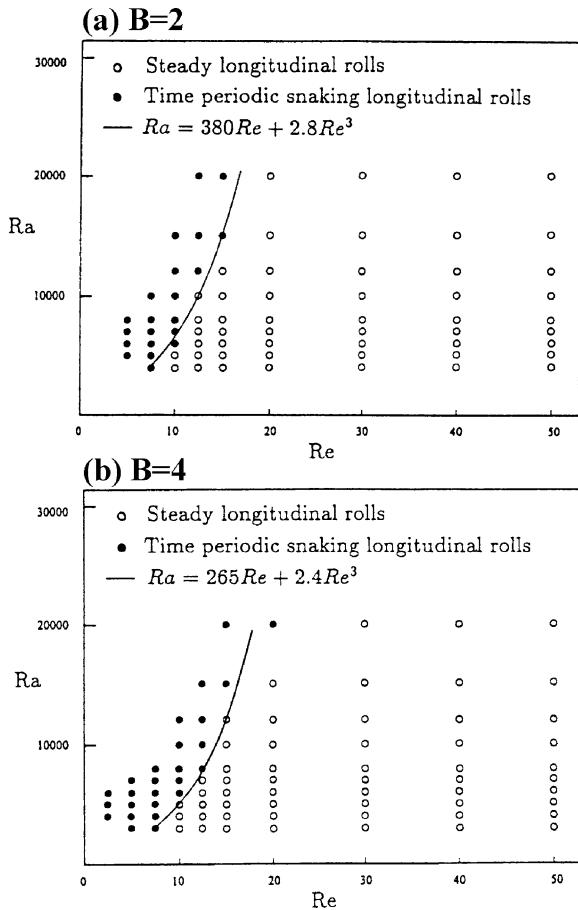


Fig. 35. Diagramme de transition établi expérimentalement dans des écoulements d'air entre les régimes de R_{\parallel} stationnaires et de R_{\parallel} sinueux périodiques en temps ; (a) $B = l/h = 2$; (b) $B = 4$ (tiré de Chang et Lin (1998) [75]).

Fig. 35. Experimental stability diagram, established experimentally in air flows, delineating the zones of steady R_{\parallel} and of time periodic snaking R_{\parallel} ; (a) $B = l/h = 2$; (b) $B = 4$ (extracted from Chang et Lin (1998) [75]).

le nombre de Rayleigh critique ($Ra_{\parallel}^{*II} \approx 5000$) est du même ordre de grandeur pour $Re < 10$ mais, dans les expériences de Chang et Lin, Ra_{\parallel}^{*II} augmente très rapidement avec Re pour $10 < Re < 20$. Deux raisons peuvent expliquer cette différence : tout d'abord, en comparant avec les domaines de stabilité convective et absolue de l'écoulement de Poiseuille vis à vis des R_{\perp} (cf. Section 5.1 et Figs. 10 et 14), il est clair qu'une étude de l'instabilité absolue des R_{\parallel} secondaires aurait permis d'obtenir une zone de R_{\parallel} stationnaires stables plus étendue. D'autre part, comme c'est le cas à la Fig. 35 pour $B = 2$ ou 4 et pour $Re > 20$, la présence des parois verticales latérales stabilise les R_{\parallel} stationnaires et donc retarde l'apparition de l'instabilité secondaire sinuuse.

Hormis Avsec (1937) [46] et Avsec et Luntz (1937) [48] déjà cités plus haut, seuls Nobile et Onesti (1996) [81] visualisent, à partir de simulations numériques directes à $Pr = 0,71$, $Re = 10$, $Ra = 10650$ et $B = 2$, des structures sinueuses oscillant en phase dans le plan horizontal, comme celles de Clever et Busse (1991) [150] (cf. Fig. 33). Des structures de ce type sont aussi observées numériquement et

expérimentalement mais dans le cas de conduite légèrement inclinées par rapport à l'horizontale ($\theta \leqslant 20^\circ$), la direction de l'écoulement pointant vers le bas. En effet, dans ce cas, l'écoulement de retour ascendant lié à la flottabilité s'oppose à l'écoulement de R_{\parallel} dirigé vers l'aval et rend les R_{\parallel} instationnaires et sinueux. De très belles images numériques et expérimentales de ce type d'écoulements sont proposées par Lin et Lin (1997) [126] pour des écoulements d'air à $Re = 35$, $Ra = 108000$ et 137000 , $B = 4$ et $\theta = 20^\circ$. Des R_{\parallel} oscillants sont aussi mentionnés dans les expériences dans l'air de Chiu et al. (2000) [14], pour $Re = 30$, $Ra' = 3 \times 10^6$ et $B = 5$, dans un canal convergent dont le plan du bas est incliné à $\theta = 8^\circ$. En ce qui concerne les effets de l'inclinaison de la conduite sur les R_{\parallel} , on pourra se référer entre autres aux articles de Nyce et al. (1992) [22], de Huang et Lin (1996) [124] et de Lin et Lin (1996) [119].

Deux autres types de structures périodiques sont mises en évidence par Yu et al. (1997) [73] grâce à des simulations numériques 3D, faites sous l'hypothèse de Boussinesq, d'écoulements dans des conduites d'allongement transversal $B = 12$, pour $Pr = 0,71$, $9000 \leqslant Ra \leqslant 31000$ et $20 \leqslant Re \leqslant 50$. Ces structures périodiques en temps et en espace prennent la forme de R_{\parallel} inclinés par rapport à l'axe de la conduite : la Fig. 36(a) montre le cas où les R_{\parallel} vont d'un bord à l'autre de la conduite, et la Fig. 36(b) montre le cas où les R_{\parallel} forment des V. La stabilité de ces structures, qui n'ont jamais été observées dans les expériences (en particulier, elles n'apparaissent pas dans le diagramme de stabilité de la Fig. 26), n'est pas étudiée par les auteurs. Pour être plus précis, à $Re = 50$, Yu et al. (1997) [73] observent des R_{\parallel} stationnaires pour $Ra \leqslant 9000$, des R_{\parallel} inclinés en V pour $Ra = 10000$, des R_{\parallel} inclinés d'un bord à l'autre du canal pour $12000 \leqslant Ra \leqslant 31000$ et une structure quasi périodique pour $Ra > 31000$. À $Ra = 9000$, ils observent des R_{\parallel} stationnaires pour $Re = 50$, des R_{\parallel} inclinés en V pour $20 \leqslant Re \leqslant 40$ et un écoulement non-périodique pour $Re = 10$.

8.3.2. Effets non-Boussinesq et route vers le chaos

A de très nombreuses reprises dans ce document, nous avons signalé dans des écoulements de PRB l'existence de régimes d'écoulements apériodiques, voire chaotiques. En général de tels régimes étaient observés à hauts Ra et à petits Re . Le but de ce paragraphe est de compléter les observations déjà faites. Ainsi, comme on peut le voir à la Fig. 34 pour $Re = 10$ et $B = 5$, Yu et Lin (1997) [129] observent que les structures périodiques en temps et symétriques par rapport à l'axe de la conduite deviennent asymétriques à partir de $Ra = 8000$. De leur côté, Nobile et Onesti (1996) [81] observent à $Re = 10$ et $B = 10$ des structures longitudinales chaotiques à $Ra = 7100$ alors qu'elles sont périodiques à $Ra = 5300$. Dans ces simulations numériques, les auteurs se placent sous l'hypothèse de Boussinesq et, par conséquent, les structures thermoconvectives se déstabilisent (deviennent asymétriques, quasi périodiques ou chaotiques) pour des valeurs de Ra (ou de Gr/Re^2) beaucoup plus

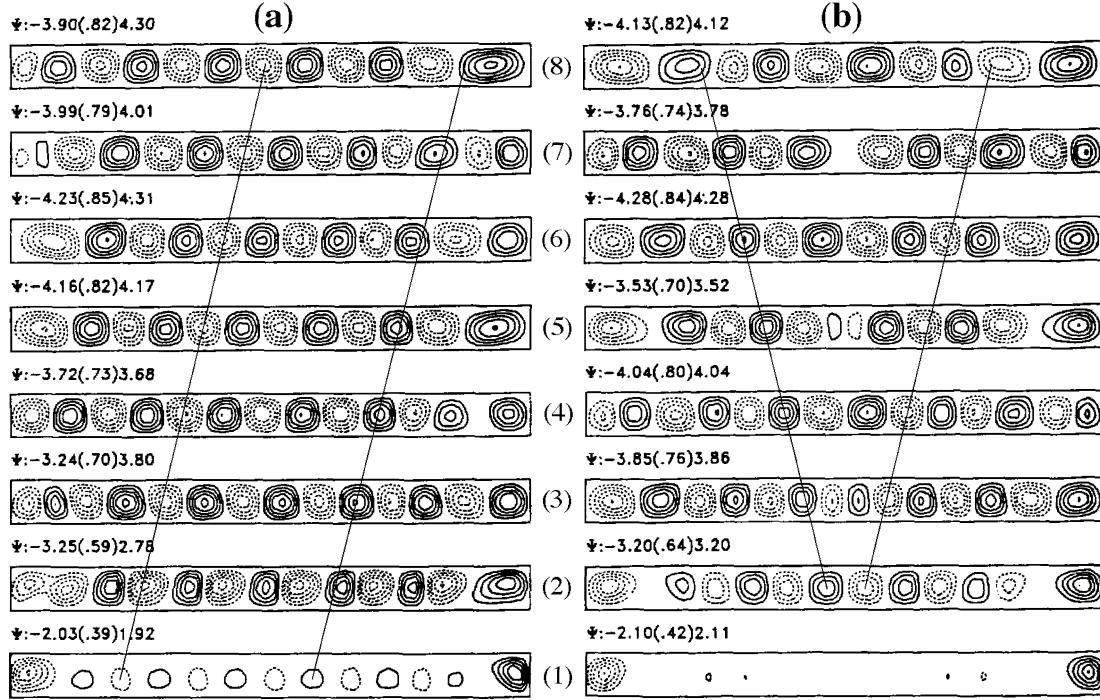


Fig. 36. Représentation des lignes de courant dans les plans (y, z) en $x = 2,52$ (1); $4,21$ (2); $5,89$ (3); $7,57$ (4); $9,26$ (5); $10,94$ (6); $12,62$ (7) et $14,30$ (8), pour deux types d'écoulements de R_{\parallel} obliques calculés par simulations numériques 3D à $Pr = 0,71$ et $B = 12$: (a) R_{\parallel} inclinés d'un bord à l'autre du canal à $Ra = 20000$ et $Re = 50$; (b) rouleaux obliques en forme de V à $Ra = 9000$ et $Re = 30$ (tiré de Yu et al. (1997) [73]).

Fig. 36. Drawing of the streamlines in the planes (y, z) at $x = 2.52$ (1), 4.21 (2), 5.89 (3), 7.57 (4), 9.26 (5), 10.94 (6), 12.62 (7) and 14.30 (8), for two types of oblique R_{\parallel} flows computed by 3D numerical simulations at $Pr = 0.71$ and $B = 12$: (a) R_{\parallel} inclined from one side of the channel to the other at $Ra = 20000$ and $Re = 50$; (b) V-shaped oblique rolls at $Ra = 9000$ and $Re = 30$ (extracted from Yu et al. (1997) [73]).

petites que lorsque les propriétés thermophysiques du fluide varient avec la température. En effet, en notant $r_T = (T_c - T_f)/T_f$ l'écart de température relativ entre la plaque chaude et la plaque froide, Evans et Greif (1993) (cf. Tableau 1) observent un écoulement instationnaire, agité par une superposition complexe de R_{\perp} et de R_{\parallel} à $Pr = 2/3$, $Re = 100$, $Ra = 83000$ et $B = 2$ lorsque $r_T = 0,01$ (c'est à dire lorsque les propriétés du fluide sont quasi constantes), alors que lorsque $r_T = 2,33$, un écoulement stable composé de deux R_{\parallel} stationnaires apparaît.

La route vers le chaos suivie par les R_{\parallel} lorsque Ra augmente (i.e., le passage des R_{\parallel} stationnaires, aux rouleaux périodiques, quasi périodiques et chaotiques) est décrite par Huang et Lin (1994) [122] à partir de leurs simulations numériques à $Pr = 0,72$, $B = 2$, $Re = 500$ et $Ra \leq 7 \times 10^6$, et par Lin et Lin (1996) [111] à partir de leurs expériences dans l'air avec $B = 4$, $9 \leq Re \leq 186$ et $Ra \leq 3,5 \times 10^6$. Ils montrent que des structures longitudinales périodiques existent jusqu'à des nombres de Rayleigh de l'ordre de 4×10^5 à $Re = 50$, 6×10^5 à $Re = 100$ et 3×10^6 à $Re = 500$. Cheng et Shi (1994) [152] proposent de très nombreuses photos montrant l'évolution des R_{\parallel} dans la zone d'entrée thermique d'une conduite d'allongement transversal $B = 2$ pour des régimes d'écoulements stationnaires à chaotiques. Ces photos sont réalisées dans des écoulements d'air avec de la fumée pour $157 \leq Re \leq 788$ et $46700 \leq Ra \leq 151000$. Signalons enfin l'étude expérimentale dans l'air avec $B = 7,7$ de Fukui

et al. (1991) [153] qui met en évidence dans des écoulements de PRB fortement turbulents ($Ra = 3,5 \times 10^6$, $Re = 3800$ ou 6700) l'existence de structures cohérentes de grande échelle prenant la forme de six R_{\parallel} de taille $1,3 \times h$.

9. Conclusion

Nous avons présenté une revue complète et détaillée des très nombreux travaux consacrés aux écoulements de Poiseuille-Rayleigh-Bénard. Nous avons montré que cette configuration d'écoulements a non seulement un intérêt fondamental (l'analyse de la stabilité des différentes structures thermoconvectives, par exemple), mais aussi un intérêt pratique, puisqu'elle intervient dans des applications industrielles à forts enjeux économiques : les dépôts de vapeurs chimiques (la CVD) et le refroidissement des composants électroniques. A de nombreuses reprises au cours de cette revue, nous avons relevé des aspects de ces écoulements encore mal connus ou mal compris. Nous nous proposons d'en faire ici le bilan.

À la Section 2.1, nous avons vu que les études sur la CVD tendent actuellement à se placer dans des configurations d'écoulements chaotiques ou turbulents afin d'obtenir des dépôts solides les plus uniformes possibles. Une perspective de recherche intéressante serait sans doute d'étudier les moyens de provoquer et de mieux contrôler ces régimes

d'écoulements en conduites rectangulaires chauffées par le bas.

À la Section 4.3, il est apparu que les études de stabilité linéaire dans la zone d'entrée thermique ne s'accordent pas entre elles et, pour la plupart, avec les résultats expérimentaux. Des études complémentaires à petits nombres de Reynolds (lorsque la diffusion axiale de la chaleur n'est plus négligeable et lorsqu'il est susceptible d'apparaître des R_{\perp}), mais aussi dans le cas de conduites d'extension transversale B finie, seraient nécessaires.

À la Section 5.3, nous avons vu qu'entre deux plaques infinies, les écoulements de R_{\parallel} sont toujours convectivement instables et que les écoulements de R_{\perp} le sont uniquement pour $Ra_{\perp}^* < Ra < Ra_{\perp}^{\text{conv}}$. Par contre, nous avons vu qu'aucune analyse théorique de la transition convective/absolue existe pour ces structures dans le cas de conduites dont le rapport d'allongement transversal est fini. Donc, pour expliquer pourquoi, en canal confiné, les R_{\parallel} naissent non loin de l'entrée thermique et pour Ra proche de Ra_{\parallel}^* , nous avons dû émettre des hypothèses qu'il serait très intéressant de vérifier : (i) les perturbations transverses dans l'entrée thermique ou (ii) la présence d'un bruit thermique au niveau des parois latérales doivent avoir une influence non négligeable sur la naissance des R_{\parallel} . De manière générale, connaissant le comportement des écoulements convectivement instables soumis à des perturbations aléatoires (cf. Sections 5.1 et 5.4), des expériences complémentaires (en laboratoire ou numériques), avec une source permanente de perturbations, seraient intéressantes à mener à la fois pour des conduites de grands allongements transversaux (afin de confirmer les résultats théoriques dans ce cas) que pour des conduites d'extension B finie. Il serait également intéressant d'étudier l'influence de sources de perturbations cohérentes (sinusoïdales par exemple), afin de mieux comprendre le mode de sélection opéré par l'écoulement, et de mieux maîtriser la naissance des structures thermoconvectives. On pourrait par exemple envisager l'étude des écoulements de PRB convectivement instables dans des canaux vibrant à amplitudes et fréquences données.

À la Section 6.2, nous avons vu que la quasi-totalité des études sur la variation du nombre de Nusselt pariétal en fonction de Re et de Ra concerne des conduites de grand allongement transversal, ou des conduites 2D dans le cas des études théoriques. L'influence du confinement latéral sur les transferts thermiques dans des écoulements de PRB pleinement développés a été très peu étudiée et certains résultats sont mêmes contradictoires.

À la Section 7.2, nous avons montré qu'à très petits débits, quel que soit le type de conditions d'entrée, il apparaît un effet de blocage des R_{\perp} , que ce soit expérimentalement ou par simulations numériques directes. Alors que ce phénomène est expliqué dans le cas de conditions d'entrée de type Neumann (flux nuls), il ne l'est pas dans le cas de conditions de Dirichlet (profils imposés).

Aux Sections 7.3 à 7.5, nous avons montré que les variations de la longueur d'onde, de la fréquence et de la

vitesse de phase des R_{\perp} , en fonction de Ra , de Re et de Pr , sont très bien connues dans le cas de problèmes 2D. Par contre, dans le cas où il y a confinement latéral, l'évolution de ces grandeurs en fonction de Pr et de B est très mal comprise et nécessiterait des approfondissements.

Dans la dernière partie (Section 8), nous avons montré qu'il existe, en plus des deux configurations thermoconvectives de base (les R_{\perp} et les R_{\parallel}), une grande variété de structures plus complexes, intermittentes, périodiques ou non. Nous avons essayé de faire la synthèse des diagrammes de stabilité connus pour ces structures. Malgré cela, en raison de la disparité des paramètres (Ra , Re , Pr , B) choisis dans ces études, cette analyse reste imprécise. Des expériences complémentaires, notamment par simulations numériques directes 3D, seraient nécessaires pour confirmer ce qui a déjà été observé, mais aussi pour couvrir une gamme plus large de nombres de Prandtl et de rapports de forme B . Dans les simulations numériques, des modèles sortant du cadre de l'approximation de Boussinesq devront être envisagés afin de mieux traduire les résultats expérimentaux à grands nombres de Rayleigh.

À la Section 8.3.1, l'analyse de la stabilité linéaire des R_{\parallel} dans un écoulement entre deux plaques infinies a montré que ces rouleaux se mettent à onduler en phase au-dessus d'un certain seuil. Ce résultat n'ayant jamais été confirmé, des expériences dans des conduites de grand allongement transversal pourraient être envisagées pour cela. A l'opposé, des études théoriques complémentaires devraient être menées dans des conduites confinées (B fini) pour essayer de comprendre ce qu'il advient de ces rouleaux sinuieux ondulant en phase, puisque les expérimentations dans ce cas ne permettent pas de les observer et montrent au contraire des rouleaux sinuieux ondulant en opposition de phase.

Annexe A. Formulation mathématique des analyses de stabilité linéaire temporelle

Dans cette annexe, nous présentons la formulation mathématique des analyses de stabilité linéaire temporelle des écoulements de PRB entre deux plaques infinies (Annexe A.1) et en conduites d'extension latérale finie (Annexe A.2). La première partie (Annexe A.1), relativement détaillée, permet de suivre sur un cas simple toutes les étapes de l'analyse. Pour un écoulement de PRB en canal confiné (Annexe A.2), l'analyse suit la même démarche qu'à l'Annexe A.1 mais les calculs étant plus compliqués, nous les présentons de manière synthétique. Pour plus de détails ou d'autres présentations, nous renvoyons à Kelly (1977, 1994) [1,2], Platten et Legros (1984) [51], Nicolas (1997) [102], Nicolas et al. (2000) [53] et Kato et Fujimura (2000) [54]. On rappelle que ces analyses permettent d'étudier la croissance temporelle de perturbations infinitésimales mais qu'elles ne donnent aucune information sur l'évolution spatiale des perturbations, c'est à dire sur la manière dont elles sont convectées par l'écoulement moyen. Pour cela il est nécessaire d'analyser l'évolution spatio-temporelle des

perturbations, ce qui fait appel aux notions d'instabilités convective et absolue (cf. Section 5).

On considère un fluide de Boussinesq, dans un canal horizontal, de section rectangulaire limitée par des parois horizontales rigides et isothermes en $z = \pm h/2$ et limitée, à l'Annexe A.2, par des parois verticales rigides et adiabatiques en $y = \pm l/2$ ($l \rightarrow \infty$ à l'Annexe A.1). Les parois du bas et du haut sont respectivement aux températures $T^\circ + \Delta T/2$ et $T^\circ - \Delta T/2$, où T° est la température moyenne de l'écoulement de base et ΔT est la différence de température entre les deux parois horizontales. Le fluide est entraîné dans la direction x infinie par un gradient de pression constant. Sous forme dimensionnelle, les champs de vitesse $\mathbf{V}(x, y, z, t)$, de température $T(x, y, z, t)$ et de pression motrice $P(x, y, z, t)$ associés à ces écoulements satisfont les équations de Boussinesq suivantes (voir la nomenclature pour connaître les notations) :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho^\circ} \nabla P + v^\circ \nabla^2 \mathbf{V} + \beta^\circ (T - T^\circ) g \mathbf{k} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T = \alpha^\circ \nabla^2 T \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Dans la suite, nous noterons surmontés d'une barre les champs associés à l'écoulement de base dont nous souhaitons étudier la stabilité (ici, c'est l'écoulement de Poiseuille purement conductif) : $\bar{\mathbf{V}} = (\bar{U}(y, z), 0, 0)$, $\bar{T}(z)$ et $\bar{P}(x, z)$. Nous noterons avec un prime les perturbations infinitésimales autour de cet écoulement de base : $\mathbf{V}'(x, y, z, t)$, $T'(x, y, z, t)$ et $P'(x, y, z, t)$. Ainsi, en notant $f = (\mathbf{V}, T, P)$ le vecteur des inconnues du système (A.1), on a $f = \bar{f} + f'$. D'autre part, dans tout ce qui suit, les grandeurs seront rendues adimensionnelles par les échelles de référence suivantes : la hauteur h pour x , y et z (sauf à l'Annexe A.2 où y sera rendu adimensionnel par la largeur l), h^2/α° pour t , la vitesse moyenne U° de l'écoulement de base pour \bar{U} , α°/h pour U' , V' et W' (sauf à l'Annexe A.2 où V' sera rendu adimensionnel par α°/l), ΔT pour $\bar{T} - T^\circ$ et $T' - T^\circ$, et $\alpha^\circ v^\circ \rho^\circ/h^2$ pour \bar{P} et P' . Les équations adimensionnelles seront fonction des paramètres suivants : $Re = U^\circ h/v^\circ$, $Ra = g \beta^\circ \Delta T h^3/(v^\circ \alpha^\circ)$, $Pr = v^\circ/\alpha^\circ$ et, à l'Annexe A.2, $B = l/h$.

A.1. Cas des écoulements de PRB entre deux plaques infinies

Pour le problème de PRB entre deux plaques infinies, l'écoulement de base est un écoulement stationnaire, parallèle, uniforme dans les directions x et y . On a donc $\bar{\mathbf{V}} = (\bar{U}(z), 0, 0)$, $\bar{T} = \bar{T}(z)$ et $\bar{P} = \bar{P}(x, z)$. La résolution de (A.1) avec les conditions aux limites décrites ci-dessus, suivie de l'adimensionnalisation, donne :

$$\begin{cases} \bar{U}(z) = \frac{3}{2}(1 - 4z^2) \\ \bar{T}(z) = -z \\ \bar{P}(x, z) = -K_P x - \frac{Ra}{2} z^2 + cste \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

où K_P est la valeur absolue du gradient de pression horizontal constant adimensionnel.

Les équations de perturbations linéarisées s'écrivent :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V}' = 0 \\ \frac{1}{Pr} \frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial t} + Re \bar{U} \frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial x} + Re W' \frac{d\bar{U}}{dz} \mathbf{i} \\ = -\nabla P' + \nabla^2 \mathbf{V}' + Ra T' \mathbf{k} \\ \frac{\partial T'}{\partial t} + Re Pr \bar{U} \frac{\partial T'}{\partial x} - W' = \nabla^2 T' \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

où \mathbf{V}' et T' vérifient les conditions aux limites suivantes : $\mathbf{V}' = \mathbf{0}$ et $T' = 0$ en $z = \pm 1/2$.

En recherchant les perturbations sous la forme de modes normaux, c'est à dire sous la forme $f'(x, y, z, t) = \hat{f}(z) \times e^{ik_x x + k_y y} e^{\sigma t}$, où k_x et k_y sont les nombres d'ondes dans les directions x et y et où $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$ est le taux de croissance temporelle, on obtient à partir de (A.3) un système de cinq équations où les inconnues sont les dépendances en z des amplitudes des perturbations : $\hat{f} = (\hat{U}, \hat{V}, \hat{W}, \hat{T}, \hat{P})$. En éliminant \hat{U} , \hat{V} et \hat{P} de ce système de cinq équations, on montre [51] que l'on peut se ramener au système de deux équations suivant :

$$\begin{cases} k^2 Q \hat{W} - \frac{d}{dz} Q \frac{d\hat{W}}{dz} \\ + ik_x Re \left(\frac{d^2 \bar{U}}{dz^2} \hat{W} + \frac{d\bar{U}}{dz} \frac{d\hat{W}}{dz} \right) - Ra k^2 \hat{T} = 0 \\ \sigma \hat{T} + ik_x Re Pr \bar{U} \hat{T} + \left(k^2 - \frac{d^2}{dz^2} \right) \hat{T} - \hat{W} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

où $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ et où l'opérateur $Q = \frac{\sigma}{Pr} + ik_x Re \bar{U} + k^2 - \frac{d^2}{dz^2}$. Les conditions aux limites sur \hat{W} et \hat{T} sont : $\hat{W} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial z} = \hat{T} = 0$ en $z = \pm 1/2$, où la deuxième condition provient de la condition d'adhérence sur \hat{U} et \hat{V} et de l'équation de continuité.

Trois cas doivent être considérés : (i) le cas $k_x = 0$ et $k_y \neq 0$ qui correspond à la formation de $R_{//}$ de longueur infinie (cf. Annexe A.1.1), (ii) le cas $k_x \neq 0$ et $k_y = 0$ qui correspond à la formation de R_\perp de longueur infinie (cf. Annexe A.1.2) et (iii) le cas $k_x \neq 0$ et $k_y \neq 0$ qui correspond à l'apparition de perturbations quelconques (par exemple, des rouleaux sinueux ou des rouleaux parallèles, infinis et inclinés par rapport à la direction de l'écoulement [51, 102]). Nous verrons à l'Annexe A.1.3 que le cas (iii) peut se ramener au cas (ii) grâce à la transformation de Squire [50].

A.1.1. $k_x = 0, k_y \neq 0$: formation de $R_{//}$

Dans ce cas, le système (A.4) se simplifie et s'écrit :

$$\begin{cases} \left(k_y^2 - \frac{d^2}{dz^2} \right) \left(\frac{\sigma}{Pr} + k_y^2 - \frac{d^2}{dz^2} \right) \hat{W} - Ra k_y^2 \hat{T} = 0 \\ \left(\frac{d^2}{dz^2} - k_y^2 - \sigma \right) \hat{T} + \hat{W} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Ce système est indépendant du nombre de Reynolds. Par suite, le problème aux valeurs propres associé à (A.5) et le nombre de Rayleigh critique résultant de sa résolution seront indépendants de Re . En fait, le système (A.5) est identique au système d'équations obtenu lors de la résolution du problème de Rayleigh–Bénard entre deux plaques infinies (cf. Chapitre II du livre de Chandrasekhar (1961) [154]). Le seuil d'instabilité correspondant à l'apparition de R_{\perp} est donc caractérisé, quel que soit Re , par $Ra_{\perp}^* = 1707,762$, $k_y^* = 3,116$ et $\sigma_i^* = 0$ (on montre en effet que le principe d'échange de stabilité est vérifié, c'est à dire que la partie imaginaire de la plus grande valeur propre σ_i^{\max} au point critique est toujours nulle).

A.1.2. $k_x \neq 0, k_y = 0$: formation de R_{\perp}

Dans ce cas, le système (A.4) s'écrit :

$$\begin{cases} k_x^2 Q \widehat{W} - \frac{d}{dz} Q \frac{d\widehat{W}}{dz} \\ + ik_x Re \left(\frac{d^2 \overline{U}}{dz^2} \widehat{W} + \frac{d\overline{U}}{dz} \frac{d\widehat{W}}{dz} \right) - Ra k_x^2 \widehat{T} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

$$\sigma \widehat{T} + ik_x Re Pr \overline{U} \widehat{T} + \left(k_x^2 - \frac{d^2}{dz^2} \right) \widehat{T} - \widehat{W} = 0 \quad (\text{A.7})$$

où l'opérateur $Q = \frac{\sigma}{Pr} + ik_x Re \overline{U} + k_x^2 - \frac{d^2}{dz^2}$ et où \widehat{W} et \widehat{T} doivent satisfaire les conditions aux limites : $\widehat{W} = \frac{\partial \widehat{W}}{\partial z} = \widehat{T} = 0$ en $z = \pm 1/2$.

Ce système d'équations est identique au système que l'on aurait obtenu dans le cas de l'analyse de la stabilité linéaire des écoulements de PRB 2D dans le plan (x, z) soumis à des perturbations 2D. Pour sa résolution, on peut utiliser la méthode classique de Galerkin qui consiste à rechercher les inconnues $\widehat{W}(z)$ et $\widehat{T}(z)$ sous la forme de développements en série limités :

$$\widehat{W}(z) = \sum_{i=1}^M a_i A_i(z) \quad \text{et} \quad \widehat{T}(z) = \sum_{j=1}^N b_j B_j(z) \quad (\text{A.8})$$

où $(A_i(z))_{i=1,M}$ et $(B_j(z))_{j=1,N}$ sont deux ensembles complets de fonctions de base linéairement indépendantes vérifiant les conditions aux limites. De plus, comme ici on s'intéresse à l'apparition de R_{\perp} , les fonctions de base doivent être paires en z . On pourra prendre par exemple : $A_i(z) = (z^2 - 1/2)^2 T_{2i-2}(z)$ et $B_j(z) = (z^2 - 1/2) T_{2j-2}(z)$, où les $T_n(z) = \cos(n \arccos(z))$ sont les polynômes de Chebyshev. Les coefficients a_i et b_j des relations (A.8) sont calculés par la méthode des résidus pondérés. Elle consiste à écrire que Res_M , le résidu d'ordre M de la relation (A.6) (c'est à dire la relation (A.6) dans laquelle on a substitué \widehat{W} et \widehat{T} par les expressions (A.8) développées à l'ordre M), doit être orthogonal à chacune des fonctions de base $A_i(z)_{i=1,M}$ et que Res_N , le résidu d'ordre N de la relation (A.7), doit être orthogonal à chacune des fonctions de base $B_j(z)_{j=1,N}$. Ainsi, les résidus doivent vérifier :

$$\begin{aligned} & \int_{z=-1/2}^{z=+1/2} \text{Res}_M A_i(z) dz = 0 \quad \text{de } i = 1 \text{ à } M \\ & \int_{z=-1/2}^{z=+1/2} \text{Res}_N B_j(z) dz = 0 \quad \text{de } j = 1 \text{ à } N \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Les relations (A.9) constituent un système algébrique linéaire homogène de $M + N$ équations permettant de calculer les $M + N$ coefficients a_i et b_j . Les éléments de la matrice de ce système contiennent des intégrales de produits de fonctions de base et sont fonction des cinq paramètres Ra , Re , Pr , σ et k_x . Ce système algébrique peut s'écrire sous la forme du problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{aligned} & (\bar{M} + i Re \bar{P} - \sigma \bar{N}) \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = 0 \\ & \iff (\bar{N}^{-1} \bar{M} + i Re \bar{N}^{-1} \bar{P} - \sigma \bar{I}) \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

où \bar{M} , \bar{N} , \bar{P} et \bar{I} sont des matrices de taille $(M + N)^2$, \bar{I} est la matrice unité et \mathbf{a} et \mathbf{b} sont les vecteurs $(a_i)_{i=1,M}$ et $(b_j)_{j=1,N}$. On est donc amené à rechercher les valeurs propres σ de la matrice $\bar{N}^{-1} \bar{M} + i Re \bar{N}^{-1} \bar{P}$. En fait, il est suffisant de déterminer la valeur propre de plus grande partie réelle σ_r^{\max} (et le vecteur propre correspondant) car σ_r^{\max} est le taux d'amplification temporelle de la perturbation la plus désstabilisante et la stabilité neutre (ou marginale) est donnée par $\sigma_r^{\max} = 0$. Pour déterminer le point critique Ra_{\perp}^* à Re et Pr fixés, il suffit de rechercher, en balayant toutes les longueurs d'onde k_x , la valeur minimale du nombre de Rayleigh pour lequel σ_r^{\max} s'annule. La solution de cette analyse est présentée qualitativement à la Fig. 4 et pour $Pr = 10$ à la Fig. 9 : le nombre de Rayleigh critique Ra_{\perp}^*

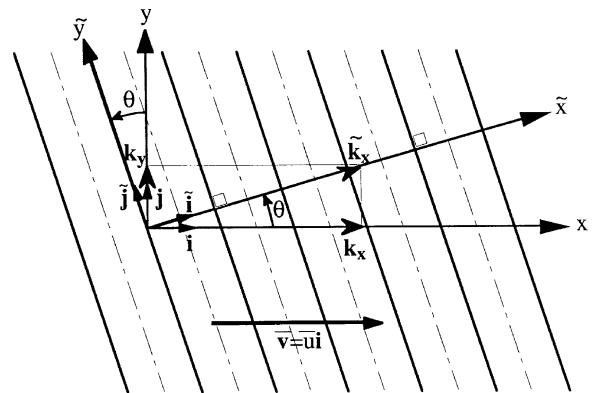


Fig. 37. Représentation du changement de repère résultant de la transformation de Squire dans le cas où les perturbations naissent sous la forme de rouleaux parallèles, inclinés d'un angle θ par rapport à la direction i de l'écoulement moyen, et de vecteur d'onde $\tilde{k}_x = \tilde{k}_x \tilde{i} = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2} \tilde{i}$ (tiré de Nicolas (1997) [102]).

Fig. 37. Representation of the change of reference frame resulting from Squire's transformation when the perturbations arise like parallel rolls, tilted of an angle θ from the direction i of the average flow, and of wave vector $\tilde{k}_x = \tilde{k}_x \tilde{i} = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2} \tilde{i}$ (extracted from Nicolas (1997) [102]).

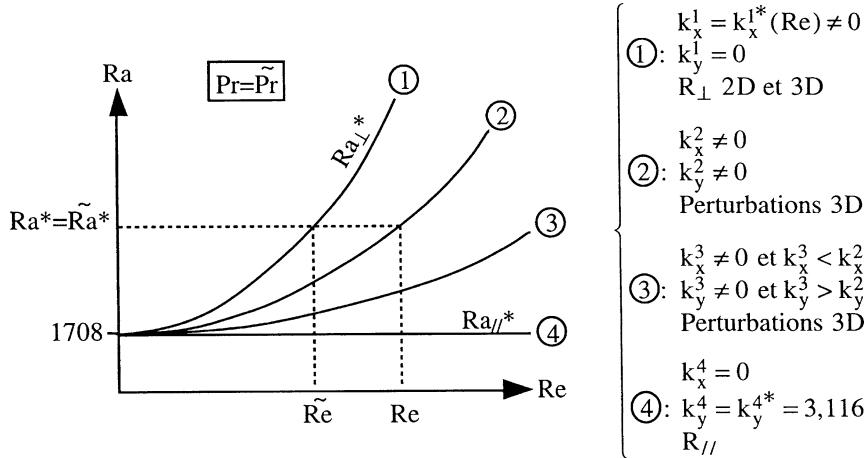


Fig. 38. Détermination graphique à l'aide de la transformation de Squire (cf. texte) des courbes critiques $Ra^* = f(Re)$ pour des perturbations 3D quelconques dans le cas d'écoulements de PRB entre deux plaques infinies (adapté de la figure VIII-3, p. 533 de Platten et Legros (1984) [51]).

Fig. 38. Graphical determination from Squire's transformation (cf. text) of the critical curves $Ra^* = f(Re)$ for any 3D perturbations in the case of PRB flows between two infinite plates (adapted from figure VIII-3, p. 533 of Platten and Legros (1984) [51]). © Springer-Verlag GmbH & Co. KG. Reproduced with permission.

d'apparition des R_\perp est égal à 1707,762 à $Re = 0$ et il croît lorsque Re augmente. Nous renvoyons aux références du Tableau 2 et à Nicolas (1997) [102] pour plus détails sur la méthodologie et les résultats de cette analyse.

A.1.3. $k_x \neq 0, k_y \neq 0$: formation de structures quelconques et transformation de Squire

Pour résoudre le système (A.4) dans le cas d'une structure quelconque (par exemple, des rouleaux convectifs inclinés d'un angle θ par rapport à la direction moyenne de l'écoulement), on utilise une transformation semblable à la transformation de Squire [50]. Elle consiste à se placer dans un nouveau repère dont la base (\tilde{i}, \tilde{j}) a tourné de l'angle $\theta = \arctan(k_y/k_x)$ par rapport à la base (i, j) , où i indique la direction de l'écoulement moyen et où j est la direction transversale (cf. Fig. 37). En notant \tilde{k}_x et \tilde{k}_y les nombres d'ondes dans les directions \tilde{i} et \tilde{j} , et en notant \tilde{Re} le nombre de Reynolds basé sur la vitesse $\bar{U} = \bar{U} \cos \theta$, la transformation de Squire consiste donc à faire le changement de variables suivant dans le système (A.4) [51,102] :

$$\left\{ \begin{array}{l} k^2 = k_x^2 + k_y^2 = \tilde{k}_x^2 \quad (\text{car } \tilde{k}_y = 0) \\ k_x Re = \tilde{k}_x \tilde{Re} \\ \sigma = \tilde{\sigma} \\ Pr = \tilde{Pr} \\ Ra = \tilde{Ra} \end{array} \right. \quad (\text{A.11})$$

On obtient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{k}_x^2 \tilde{Q} \tilde{W} - \frac{d}{dz} \tilde{Q} \frac{d\tilde{W}}{dz} \\ + i \tilde{k}_x \tilde{Re} \left(\frac{d^2 \bar{U}}{dz^2} \tilde{W} + \frac{d\bar{U}}{dz} \frac{d\tilde{W}}{dz} \right) - \tilde{Ra} \tilde{k}_x^2 \tilde{T} = 0 \\ \tilde{\sigma} \tilde{T} + i \tilde{k}_x \tilde{Re} \tilde{Pr} \bar{U} \tilde{T} + \left(\tilde{k}_x^2 - \frac{d^2}{dz^2} \right) \tilde{T} - \tilde{W} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.12})$$

où $\tilde{Q} = \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{Pr}} + i \tilde{k}_x \tilde{Re} \bar{U} + \tilde{k}_x^2 - \frac{d^2}{dz^2}$.

Ce système étant identique au système (A.6)–(A.7) obtenu dans le cas de l'apparition de R_\perp au point critique, la Fig. 38 montre la manière dont la courbe critique $Ra^*(Re)$ pour les structures quelconques ($k_x \neq 0, k_y \neq 0$) peut se déduire graphiquement de la courbe critique $\tilde{Ra}^*(\tilde{Re})$ pour les R_\perp . En effet, grâce à la transformation de Squire, on sait que la stabilité neutre (donnée par $\sigma_r^{\max} = \tilde{\sigma}_r^{\max} = 0$), lorsque $Pr = \tilde{Pr}$, est atteinte pour le même nombre de Rayleigh critique $Ra^* = \tilde{Ra}^*$ si le nombre de Reynolds pour les structures quelconques est $Re = \tilde{k}_x \tilde{Re} / k_x$. Or, comme $\tilde{k}_x > k_x$, on a $Re > \tilde{Re}$. De plus, pour \tilde{Re} fini, dans le cas limite où k_x tend vers 0, c'est à dire pour \tilde{k}_x tendant vers $k_y \neq 0$, la deuxième relation de (A.11) montre que Re doit tendre vers l'infini : on retrouve la courbe $Ra_{||}^*$.

A.2. Cas des écoulements de PRB en conduites d'extension latérale finie

Pour le problème de PRB en conduites d'extension latérale finie, les profils de température $\bar{T}(z)$ et de pression $\bar{P}(x, z)$ de l'écoulement de base sont donnés par (A.2). Par contre, le profil de vitesse est ici fonction de y et de z : $\bar{V} = (\bar{U}(y, z), 0, 0)$. On montre que [53] :

$$\bar{U}(y, z) = \frac{3}{2} (1 - 4z^2) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \operatorname{ch}((2n+1)\pi B y) \cos((2n+1)\pi z) \quad (\text{A.13})$$

avec

$$A_n = \frac{48(-1)^{n+1}}{(2n+1)^3 \pi^3 \operatorname{ch}((n+1/2)\pi B)}$$

où $B = l/h$ est le rapport de forme transversal et où \bar{U} est rendue adimensionnelle par la vitesse moyenne U° de l'écoulement de base 2D.

Les équations de perturbations linéarisées adimensionnelles s'écrivent :

$$\begin{cases} \nabla_B \cdot V' = 0 \\ \frac{1}{Pr} \frac{\partial V'}{\partial t} + Re \bar{U} \frac{\partial V'}{\partial x} + \left(\frac{Re}{B^2} V' \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} Re W' \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right) i \\ = -\nabla P' + \nabla_B^2 V' + Ra T' k \\ \frac{\partial T'}{\partial t} + Re Pr \bar{U} \frac{\partial T'}{\partial x} - W' = \nabla^2 T' \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

où $\nabla_B = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{B^2} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$ et $\nabla_B^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, où \bar{U} est rendue adimensionnelle par la vitesse moyenne U_{3D}° de l'écoulement de base 3D et où V' et T' vérifient les conditions aux limites : $V' = \mathbf{0}$ et $\partial T'/\partial y = 0$ en $y = \pm 1/2$ et $V' = \mathbf{0}$ et $T' = 0$ en $z = \pm 1/2$.

En raisonnant comme précédemment, les perturbations sont recherchées sous la forme des modes normaux suivants : $f'(x, y, z, t) = \hat{f}(y, z) e^{ik_x x} e^{\sigma t}$ et on obtient, à partir de (A.14), un système de cinq équations où les inconnues sont les dépendances en y et z des amplitudes des perturbations : \hat{U} , \hat{V} , \hat{W} , \hat{T} et \hat{P} . A ce niveau deux cas doivent être considérés : (i) le cas $k_x = 0$ qui correspond à la formation d'un nombre fini de $R_{//}$ de longueur infinie (cf. Annexe A.2.1) et (ii) le cas $k_x \neq 0$ qui correspond à la formation de structures 3D quelconques (cf. Annexe A.2.2).

A.2.1. $k_x = 0$: formation de $R_{//}$

Dans ce cas, les équations fonction de \hat{U} , \hat{V} , \hat{W} , \hat{T} et \hat{P} s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{1}{B^2} \frac{\partial \hat{V}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{W}}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{cases} \frac{\sigma}{Pr} \hat{U} + \frac{Re}{B^2} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \hat{V} + Re \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \hat{W} = \nabla_2^2 \hat{U} \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{cases} \frac{\sigma}{Pr} \hat{V} = -\frac{\partial \hat{P}}{\partial y} + \nabla_2^2 \hat{V} \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{cases} \frac{\sigma}{Pr} \hat{W} = -\frac{\partial \hat{P}}{\partial z} + \nabla_2^2 \hat{W} + Ra \hat{T} \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

$$\begin{cases} \sigma \hat{T} - \hat{W} = \nabla_2^2 \hat{T} \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

où $\nabla_2^2 = \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Dans ce système, l'équation (A.16) pour \hat{U} peut être résolue séparément une fois \hat{V} et \hat{W} connus et les quatre équations (A.15), (A.17)–(A.19), indépendantes de Re , forment le même problème aux valeurs propres que pour le problème de Rayleigh–Bénard en canal confiné (déjà traité, par exemple, par Luijkx et Platten (1981) [71]). Comme on peut montrer que le principe d'échange de stabilité est vérifié dans ce cas ($\sigma_i^{\max} = 0$ au point critique), le nombre de Rayleigh critique $Ra_{//}^*$ issu de ce problème aux valeurs propres est indépendant de Re et de Pr et ne dépend que de B . Les résultats de cette analyse sont présentés à la Fig. 8.

A.2.2. $k_x \neq 0$: formation de structures 3D

En éliminant successivement \hat{U} et \hat{P} des cinq équations en amplitude de perturbations, on obtient le système de trois équations suivant [53] :

$$\begin{cases} Q \hat{V} - \frac{1}{k_x^2 B^2} \frac{\partial}{\partial y} Q \frac{\partial \hat{V}}{\partial y} + \frac{i Re}{k_x B^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} \hat{V} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \frac{\partial \hat{V}}{\partial y} \right) \\ - \frac{1}{k_x^2} \frac{\partial}{\partial y} Q \frac{\partial \hat{W}}{\partial z} + \frac{i Re}{k_x} \left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y \partial z} \hat{W} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \frac{\partial \hat{W}}{\partial y} \right) = 0 \\ Q \hat{W} - \frac{1}{k_x^2} \frac{\partial}{\partial z} Q \frac{\partial \hat{W}}{\partial z} + \frac{i Re}{k_x} \left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} \hat{W} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \frac{\partial \hat{W}}{\partial z} \right) \\ - \frac{1}{k_x^2 B^2} \frac{\partial}{\partial z} Q \frac{\partial \hat{V}}{\partial y} + \frac{i Re}{k_x B^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y \partial z} \hat{V} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \frac{\partial \hat{V}}{\partial z} \right) \\ - Ra \hat{T} = 0 \\ \sigma \hat{T} + ik_x Re Pr \bar{U} \hat{T} + (k_x^2 - \nabla_2^2 \hat{T}) \hat{T} - \hat{W} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

où $Q = \frac{\sigma}{Pr} + ik_x Re \bar{U} + k_x^2 - \nabla_2^2$. De plus, $\hat{V} = \hat{W} = \frac{\partial \hat{V}}{\partial z} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial z} = 0$ en $y = \pm 1/2$ et $\hat{V} = \hat{W} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial z} = \hat{T} = 0$ en $z = \pm 1/2$, où la condition de Neuman sur \hat{V} et \hat{W} provient de l'équation de continuité et de la condition d'adhérence sur \hat{U} .

Le système (A.20) avec les conditions aux limites associées peut être résolu par la méthode de Galerkin :

$$\begin{aligned} \hat{V}(y, z) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J a_{ij} A_i(y) B_j(z) \\ \hat{W}(y, z) &= \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L b_{kl} C_k(y) D_l(z) \\ \hat{T}(y, z) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_{mn} E_m(y) F_n(z) \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

où $(A_i(y))_{i=1,I}$, $(B_j(z))_{j=1,J}, \dots, (F_n(z))_{n=1,N}$ sont six ensembles complets de fonctions de base linéairement indépendantes vérifiant les conditions aux limites. Comme à la Section A.1.2, les coefficients a_{ij} , b_{kl} et c_{mn} sont calculés par la méthode des résidus pondérés qui aboutit à la résolution d'un problème aux valeurs propres en σ et à la détermination des paramètres critiques au seuil de l'instabilité linéaire (cf. Figs. 5 et 9 et Section 4.2.3).

On peut cependant montrer ici [53,54] qu'à cause des symétries du problème (symétries de réflexion par rapport aux plans horizontal et vertical médians des équations (A.20) et des conditions aux limites), on peut classer les solutions en quatre classes de différentes parités. Ces quatre classes sont présentées dans le Tableau 9. On est donc amené en réalité à résoudre quatre problèmes aux valeurs propres, un pour chaque classe de solution. Dans le Tableau 9, nous avons dessiné, dans le plan (y, z) , à partir des composantes \hat{V} et \hat{W} des amplitudes des perturbations de vitesse, les structures convectives correspondant à chaque classe. La structure complète est obtenue en prenant en compte $\hat{U}(y, z)$ et la dépendance en x des perturbations (de la forme $e^{ik_x x}$). On

Tableau 9

Les quatre types de solutions possibles, classées en fonction de leur parité (E = even = paire ; O = odd = impaire), au seuil de l'instabilité linéaire en conduite d'extension latérale finie, et représentation schématique, dans le plan (y, z), des formes des perturbations associées (tiré de Nicolas et al. (2000) [53])

Table 9

The four types of possible solutions, classified as a function of their parity (E = even ; O = odd), at the linear instability threshold in finite lateral extension channels, and schematic representation of the associated patterns in the plane (y, z) (extracted from Nicolas et al. (2000) [53])

	Case A		Case B		Case C		Case D	
	y	z	y	z	y	z	y	z
u'	E	O	O	O	O	E	E	E
v'	O	O	E	O	E	E	O	E
w'	E	E	O	E	O	O	E	O
T'	E	E	O	E	O	O	E	O
P'	E	O	O	O	O	E	E	E

– even number of $R_{//}$ when $k_x \rightarrow 0$;
– horseshoe-shaped
 R_{\perp} when $k_x \approx 3$.

– odd number of $R_{//}$ when $k_x \rightarrow 0$;
– physically never observed patterns when $k_x > 0$.

– physically never observed patterns whatever k_x .

– physically never observed patterns whatever k_x .

peut montrer que les structures des cas *C* et *D* n'apparaissent jamais au seuil de l'instabilité linéaire car les nombres de Rayleigh critiques pour ces deux cas sont toujours supérieurs à ceux des cas *A* et *B*. Les problèmes aux valeurs propres des cas *A* et *B* montrent que trois types de structures déjà observées expérimentalement sont susceptibles d'apparaître au seuil de l'instabilité linéaire : un nombre pair (cas *A*) ou impair (cas *B*) de $R_{//}$ lorsque $k_x^* \rightarrow 0$ et des R_{\perp} en forme de fer à cheval dans le cas *A* lorsque $k_x^* \approx 3$. Ces R_{\perp} incurvés par les conditions d'adhérence aux parois sont représentés aux Figs. 31(b) et (e) dans le cas où les parois latérales sont parfaitement conductrices. Lorsque $k_x > 0$ dans le cas *B*, la structure d'écoulement correspondante n'a jamais été observée expérimentalement. En effet, comme U' est impair en y , l'amplitude de U' s'annule dans le plan vertical médian $y = 0$.

Dans cette partie, la démarche et les notations adoptées correspondent à l'article de Nicolas et al. (2000) [53], auquel nous renvoyons pour avoir plus de détails sur le calcul du profil de base $\bar{U}(y, z)$, sur la prise en compte de la parité des solutions, sur le choix des fonctions de base et sur la détermination des paramètres critiques Ra_{\perp}^* , Re^* , k_x^* et σ_i^* . Nous renvoyons également à Kato et Fujimura (2000) [54] qui réalisent la même analyse de stabilité linéaire mais avec d'autres techniques de calculs leur permettant d'obtenir des ordres de précision élevés sur les paramètres critiques (profil de base $\bar{U}(y, z)$ développé en somme de polynôme de Chebyshev, ordres de troncature élevés dans (A.21),

problèmes aux valeurs propres résolus par la méthode QZ et solutions raffinées par des itérations de Newton–Raphson, ...).

Abridged English version

Bibliographical review on the Poiseuille–Rayleigh–Bénard flows: The mixed convection flows in horizontal rectangular ducts heated from below

Section 1. The Poiseuille–Rayleigh–Bénard (PRB) flows are laminar mixed convection flows in horizontal rectangular ducts uniformly heated from below and uniformly cooled from above. The three most common configurations in PRB flows are the Poiseuille flow and two thermoconvective flow configurations: the transversal rolls (R_{\perp}) and the longitudinal rolls ($R_{//}$). These flow patterns are presented on Figs. 1, 2 and 3, respectively, with their parameter range. This paper aims at making a comprehensive review of the literature on the PRB flows and a synthesis of the qualitative and quantitative data which describe them. Notably, we complete Kelly's reviews [1,2] by analysing more than ninety new references on this subject, among which fifty are later than 1993. The temporal linear stability analyses of the Poiseuille flow vis-à-vis the R_{\perp} and the $R_{//}$ give the diagrams presented on Figs. 4 and 5 for infinite and finite spanwise aspect ratio ducts, respectively. The results of these diagrams have been known since early eighties

(cf. Section 4). They are qualitative results which only give a simplified idea of the stability of the PRB flows. The spatio-temporal linear stability analyses (dating from early nineties), which imply the concepts of convective and absolute instabilities, are more appropriate to describe the stability of these flows (cf. Section 5). Furthermore, recent experimental, theoretical and numerical studies, carried out in the non-linear domain, have shown the existence of three-dimensional unsteady thermoconvective structures whose shape is more complex than the R_{\perp} and the R_{\parallel} . A review of these complex structures and on their stability is proposed in Section 8. The industrial applications of the PRB flows are presented in Section 2 and the pioneer experiments are presented in Section 3. A review on the heat transfers and on the characteristics growth length of the R_{\perp} and of the R_{\parallel} is proposed in Section 6, and a synthesis of the quantitative data on the spatial and temporal characteristics of the R_{\perp} and of the R_{\parallel} is given in Section 7.

Section 2. The two main industrial applications of the PRB flows concern, first, the development of the horizontal rectangular chemical vapor deposition (CVD) reactors which are used to produce thin and uniform films of inorganic matter (cf. Section 2.1) and, second, the cooling of the electronic equipments (cf. Section 2.2). A general presentation of the CVD process is done in Section 2.1.1. In Section 2.1.2, it is shown that the presence of R_{\perp} flows, of R_{\parallel} flows or of a steady transversal roll located just above the entrance of the heated zone (cf. Fig. 6 and Table 1 where this roll is noted “ R_{\perp} fixe”) must be eliminated of the CVD reactors because these thermoconvective structures cause non-uniform deposits. Recent studies [15,18–20] show that the aperiodic or chaotic flows observed at high Rayleigh and low Reynolds numbers should be used to get uniform deposits in CVD reactors. A synthesis of the CVD numerical studies for configurations close to the PRB flows is presented in Section 2.1.3 and in Table 1. The studies on the cooling of electronic equipments, close to the PRB flow configuration, are summed up in Section 2.2.

Section 3. In this section, we present a review of the pioneer experiments which took place from 1920 (with the first studies of Idrac [35,36]) to 1938. They are mainly concerned with applications to meteorology. Their results were synthesized by Sir Brunt in 1951 [3].

Section 4. From 1962 to 1984, the PRB flow studies were mainly based on linear stability analyses of the Poiseuille flow, completed by experiments to verify the results of the theoretical models. Some of these models (based on temporal linear stability analyses) and the associated experiments concentrated on the fully-established thermoconvective flows (cf. Section 4.2), while the others (based on spatial linear stability analyses) and the associated experiments concentrated on the thermal entrance zone (cf. Section 4.3). The whole theoretical analyses are summarized in Table 2, in which the parameter range, the form of the normal modes,

the criteria of neutral stability and the type of the thermoconvective structures appearing above the neutral stability threshold are mentioned. In Section 4.2.1, the studies dealing with the stability of the Poiseuille flow vis-à-vis the first type and second type R_{\parallel} (cf. Fig. 7) are reviewed. In Section 4.2.2, a long discussion about the experimental verification of the increase with Re of the critical Rayleigh number for the R_{\perp} (Ra_{\perp}^*) is reported. Three analytical formulae, extracted from [67,68], giving Ra_{\perp}^* and the critical time pulsation and wave number for the R_{\perp} as a function of Re and Pr , are also reported (cf. Eqs. (1)–(3)). In Section 4.2.3, we briefly comment on the results of the 3D temporal linear stability analysis in finite lateral extension ducts [52–54]. Some of these results are presented in Figs. 5, 8–10. The mathematical formulation of the temporal linear stability analysis is given in Appendix A. In Section 4.2.4, the weaknesses of this temporal linear stability analysis are brought out: First, it predicts either an odd or an even number of R_{\parallel} to appear depending on the aspect ratio B (cf. Fig. 8), whereas all the experiments and numerical simulations predict an even number of R_{\parallel} for fully-established flows at $Re > 0$ and for $B > 1.1$ (cf. [76] for the explanation); second, it rightly predicts the critical Rayleigh number Ra_{\parallel}^* for the appearance of the R_{\parallel} , but fails to predict the critical Rayleigh number for the appearance of the R_{\perp} and the critical Reynolds number $Re_{\perp-\parallel}^*$ determined experimentally and numerically (cf. Fig. 10 and Table 3). To remedy this, the space and time growth of the perturbations has to be analysed, i.e., a convective/absolute stability analysis is necessary (cf. Section 5). In Section 4.3, three studies on the PRB flow stability in the entrance zone of infinite lateral extension ducts are analysed (cf. Table 2). The used stability criteria are schematically represented in Fig. 12. Fig. 11 shows that the R_{\perp} are more unstable than the R_{\parallel} just at the entrance of the heated zone for small Reynolds numbers, which is widely verified by several recent papers. As shown in Fig. 13, the stability criterion used in [87] permits to find the experimental results again with a good agreement.

Section 5. In Sections 5.1 and 5.2, we remind the reader of the general notions about the convective and absolute instabilities (cf. Fig. 14 in the case of 2D PRB flows) and about the amplitude and Ginzburg–Landau equations. The criteria of stability and of absolute and convective instability for the Ginzburg–Landau Eq. (5) in its linearised version are given by Eqs. (6)–(8) respectively. In Section 5.3, the two main contributions to the analyse of the convective and absolute instabilities in PRB flows are reviewed. Müller et al. [67,68,78,91] analyse the transitions between Poiseuille flow and R_{\perp} in 2D PRB flows by 2D numerical simulations and with the Ginzburg–Landau equation (9) (cf. Table 4 for the coefficient values of this equation and cf. Fig. 10 for the convective/absolute transition curve Ra_{\perp}^{conv} computed from this theory). Carrière and Monkewitz [69] analyse the convective/absolute instability of the 3D PRB flows between two infinite horizontal walls by directly computing the Green

function and by analysing its long-time behaviour. The original result of [69], which contradicts the ones obtained from the models based on two amplitude equations [103–106], is that the R_{\parallel} are never absolutely unstable when $Re > 0$. Furthermore, when $Ra < Ra_{\perp}^{\text{conv}}$, the most amplified mode, located at the center of the wave packet, corresponds to the appearance of R_{\parallel} . It is shown that complementary theoretical or experimental studies would be necessary to understand the convective/absolute transitions for the R_{\perp} and the R_{\parallel} in the case of finite cross section ducts. Two possible scenarios are proposed to try to explain why in the experiments and in the numerical simulations the R_{\parallel} rise not far from the inlet and for Ra close to Ra_{\parallel}^* , if we consider that the R_{\parallel} are convectively unstable like in the case of flows between two infinite plates. In Section 5.4 and Fig. 15, the results of Müller et al. [67,68,91] on the influence of a white noise on the convectively unstable R_{\perp} flows are presented and the references of studies comparing the influence of local and global noise on convectively unstable PRB flows are given [108,109].

Section 6. In Section 6.1, the studies on the axial variation of the time and spanwise average Nusselt number in the thermal entrance zone of PRB flows are reviewed. This variation is shown for R_{\parallel} flows on Fig. 16, where three zones are revealed. Eqs. (11), (12), (13) and (16) are correlation laws respectively for the coordinates x_1 of the beginning of zone (2), x_2 of Nu^{\max} in zone (2) and x_3 at which Nu exceeds the forced convection value of zone (1) by 3%. Other correlation laws (Eqs. (14) and (15)) for the appearance length and the establishment length of the R_{\parallel} , determined from LDA experiments, are reported in Section 6.3.1. The results and the variation laws for the space and time average Nusselt number in fully-established PRB flows are reviewed in Section 6.2 and Table 5. This Nusselt number is shown to keep constant whatever Re in the case of R_{\parallel} flows, but it is shown to decrease when Re increases in the case of R_{\perp} flows. Most of the heat transfer studies are carried out in ducts of very large or infinite (2D) cross section. Very few data on the spanwise confinement influence on heat transfers are available. Section 6.3.2 is dedicated to the determination of the characteristic growth length l_e of the R_{\perp} . As shown in Fig. 17 and in the nomenclature, l_e is determined from the stationary envelope $W_{\max}(x)$. The curve $L_e = f(V_g)$ drawn on Fig. 18, representing the variation of the reduced growth length L_e as a function of the reduced group velocity V_g , is shown to be a universal curve in the sense that it is independent of the Prandtl number, as long as Re and Ra are not too large [68,78]. The divergence of the curve $L_e = f(V_g)$ at $V_g = 2$ corresponds to the transition between the absolutely unstable R_{\perp} ($V_g < 2$) and the convectively unstable R_{\perp} ($V_g > 2$). The values of Ra and Re at which l_e diverge are shown to be a very precise criterion to define the transition curve $Ra_{\perp}^{\text{conv}}(Re)$ (compare Figs. 10 and 17).

Section 7. In this section, the fine spatial and temporal structure of the R_{\perp} is analysed. In Section 7.1, the influence on this structure of the open boundary conditions (OBC) that must be imposed at the outlet boundary of the computational domains for the numerical simulations is reviewed. Among all the tested OBC, the Orlanski type boundary conditions (Eq. (17)) is shown to be the one which perturbs the least the R_{\perp} flows. The influence of the inlet boundary conditions (IBC) on the R_{\perp} development in the numerical simulations and in the experiments is reviewed in Section 7.2. The IBC influence on the R_{\perp} is shown to be more important than the one of the OBC. The growth length l_e , the wave length λ and the frequency f of the R_{\perp} vary depending on whether the IBC is of Dirichlet or of Neumann type [143] (cf. Fig. 21). At very small but non-vanishing flows, the R_{\perp} are shown to be pinned by the IBC (cf. Fig. 20). A new critical Reynolds number Re^{**} indicating the transition between the stationary and the moving R_{\perp} is introduced. An analytical expression for Re^{**} is proposed by [68,91] (cf. Eq. (19)). It is compared to 2D numerical results in Table 6. While the origin of the R_{\perp} pinning with the Neumann inlet conditions is clearly identified, it is not explained with the Dirichlet inlet conditions. For fully-established R_{\perp} flows, the variations of f , λ and Vr/U° (the ratio of the R_{\perp} velocity to the average velocity of the channel flow) as a function of the flow parameters are reviewed in Sections 7.3, 7.4 and 7.5, respectively. While the variations of f , λ and Vr/U° as a function of Ra , Re and Pr are quite well known in the case of 2D problems ($B \rightarrow \infty$), in the case of finite cross section ducts, the variations of these quantities as a function of Pr and B are very badly known because of a lack of data (cf. Figs. 20–23 and Tables 7 and 8). The linear correlation laws giving Vr/U° as a function of Ra are summarized in Table 8 and in Figs. 22 and 23 for the infinite (2D) and finite cross section ducts, respectively. Note that these laws are independent of Re , except in one case [128].

Section 8. The aim of this section is to synthetize the data obtained these last ten years regarding the description and the stability of the complex thermoconvective patterns of the PRB flows. In Section 8.1, the two most precise and complete experimental stability diagrams of the PRB flows (cf. Figs. 24 and 26) are presented (Section 8.1.1) and analysed (Section 8.1.2). They are compared with each other and with other results of literature. In Section 8.1.2, we particularly concentrate on patterns with splitting and merging of R_{\parallel} , with hysteresis effects and with superposition of R_{\perp} and R_{\parallel} (cf. Figs. 27 and 28 for this third case). In Section 8.1.1, the seventeen very recent experimental and numerical papers of Lin et al. about PRB flows are summarized. In Section 8.2, the stability diagram and two flow patterns obtained from a model based on two coupled Ginzburg–Landau equations (Eqs. (21)) by Müller et al. [104] are analysed (cf. Figs. 29 and 30), despite the criticism of Carrrière and Monkewitz [69] about the validity of this model. Kato and Fujimura's (2000) [54] weakly non-linear stability

analysis, based on Eqs. (22), is also reported. It analyses the stability of the three thermoconvective patterns that are presented on Fig. 31 (the $R_{//}$, the 3D horse-shoe shaped R_{\perp} and the mixed modes) in the neighborhood of the critical point $(Ra, Re) = (Ra_{//}^*, Re^*)$. In Section 8.3.1, the stability diagram of the fully-established stationary $R_{//}$ vis-à-vis the secondary wavy instability of Fig. 33 (cf. Fig. 32), obtained by Clever and Busse [150] from a temporal linear stability analysis, is compared to the other experimental and numerical results of literature. It is shown that the in phase wavy $R_{//}$ of Fig. 33 have been observed in horizontal ducts only three times [46,48,81] and also in slightly inclined ducts [126]. On the other hand, $R_{//}$ waving in opposition of phase (cf. Fig. 34) have been observed in numerous experimental and numerical studies, particularly in small spanwise aspect ratio ducts ($B \leq 6$) [18,75,81,129]. Two stability diagrams of these periodic wavy rolls are presented in Fig. 35. Complementary studies should be carried out to explain theoretically the presence of these $R_{//}$ oscillating in opposition of phase in the experiments and to confirm experimentally or numerically the existence of the $R_{//}$ oscillating in phase. Other complex flow patterns (inclined or V-shaped $R_{//}$), only observed by Yu et al. [73], are reproduced on Fig. 36. In Section 8.3.2, the successive transitions in PRB flows, from the symmetric and periodic $R_{//}$ flows to the asymmetric and periodic $R_{//}$ flows (cf. Fig. 34(d)), then to the aperiodic flows and to the chaotic flows, are reviewed. It is shown that numerical simulations with non-Boussinesq codes will have to be envisaged in order to better agree with the experiments at high Rayleigh numbers.

Section 9. As a conclusion, the badly known or badly understood aspects of the PRB flows are summed up and subjects for future investigations are proposed.

Appendix A

This appendix presents the mathematical formulation of the temporal linear stability analyses of the purely conductive Poiseuille flow for PRB flows between two infinite plates (Appendix A.1) and in finite lateral extension channels (Appendix A.2).

Remerciements

Cet article est le fruit de cinq années passées dans l'équipe du Professeur A. Mojtabi, à l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, UMR CNRS/INP-UPS 5502, et de plusieurs collaborations avec le Professeur J.-K. Platten de l'Université de Mons-Hainaut. Qu'ils veuillent bien trouver ici l'expression de ma très sincère gratitude pour m'avoir fait bénéficier de toute leur culture et de leur expérience sur le sujet. Je remercie également Monsieur S.A. Bories, éditeur associé de l'International Journal of Thermal Sciences, d'avoir initié et soutenu ce projet.

Références

- [1] R.E. Kelly, The onset and development of Rayleigh–Bénard convection in shear flows: A review, in: D.B. Spalding (Ed.), *Physicochemical Hydrodynamics*, Advance Publication, London, 1977, pp. 65–79.
- [2] R.E. Kelly, The onset and development of thermal convection in fully developed shear flows, *Adv. Appl. Mech.* 31 (1994) 35–112.
- [3] D. Brunt, Experimental cloud formation, in: *Compendium of Meteorology*, American Meteorological Society, Boston, 1951, pp. 1255–1262.
- [4] K.F. Jensen, E.O. Einset, D.I. Fotiadis, Flow phenomena in chemical vapor deposition of thin films, *Ann. Rev. Fluid Mech.* 23 (1991) 197–233.
- [5] N.K. Ingle, T.J. Mountzaris, The onset of transverse recirculations during flow of gases in horizontal ducts with differentially heated lower walls, *J. Fluid Mech.* 277 (1994) 249–269.
- [6] G. Evans, R. Greif, A study of traveling wave instabilities in a horizontal channel flow with applications to chemical vapor deposition, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 32 (1989) 895–911.
- [7] G. Evans, R. Greif, Unsteady three-dimensional mixed convection in a heated horizontal channel with applications to chemical vapor deposition, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 34 (1991) 2039–2051.
- [8] H.K. Moffat, K.F. Jensen, Complex flow phenomena in MOCVD reactors—1. Horizontal reactors, *J. Crystal Growth* 77 (1986) 108–119.
- [9] H.K. Moffat, K.F. Jensen, Three-dimensional flow effects in silicon CVD in horizontal reactors, *J. Electrochemical Soc.* 135 (1988) 459–470.
- [10] J. Ouazzani, F. Rosenberger, Three-dimensional modelling of horizontal chemical vapor deposition—1. MOCVD at atmospheric pressure, *J. Crystal Growth* 100 (1990) 545–576.
- [11] C.R. Kleijn, C.J. Hoogendoorn, A study of 2-D and 3-D transport phenomena in horizontal chemical vapor deposition reactors, *Chemical Engrg. Sci.* 46 (1991) 321–334.
- [12] K.C. Karki, P.S. Sathyamurthy, S.V. Patankar, Three-dimensional mixed convection in a horizontal chemical vapor deposition reactor, *J. Heat Transfer* 115 (1993) 803–806.
- [13] K.W. Park, H.Y. Pak, Characteristics of three-dimensional flow, heat and mass transfer in a chemical vapor deposition reactor, *Numer. Heat Transfer A* 37 (2000) 407–423.
- [14] W.K.S. Chiu, C.J. Richards, Y. Jaluria, Flow structure and heat transfer in a horizontal converging channel heated from below, *Phys. Fluids* 12 (2000) 2128–2136.
- [15] I. Hosokawa, Y. Tanaka, K. Yamamoto, Mixed convective flow with mass transfer in a horizontal rectangular duct heated from below simulated by the conditional Fourier spectral analysis, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 36 (1993) 3029–3042.
- [16] E.P. Visser, C.R. Kleijn, C.A.M. Govers, C.J. Hoogendoorn, L.J. Giling, Return flows in horizontal MOCVD reactors studied with the use of TiO₂ particle injection and numerical calculations, *J. Crystal Growth* 94 (1989) 929–946, et errata 96 (1989) 732–735.
- [17] T.M. Makhviladze, A.V. Martjushenko, Several aspects of the return flows formation in horizontal CVD reactors, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 41 (1998) 2529–2536.
- [18] R.E. Spall, Unsteady mixed convection in horizontal ducts with applications to chemical vapor deposition processes, *Internat. Comm. Heat Mass Transfer* 23 (1996) 115–122.
- [19] R.E. Spall, Observations of spanwise symmetry breaking for unsteady mixed convection in horizontal ducts, *J. Heat Transfer* 118 (1996) 885–888.
- [20] H. Koizumi, I. Hosokawa, Unsteady behavior and mass transfer performance of the combined convective flow in a horizontal rectangular duct heated from below, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 36 (1993) 3937–3947.
- [21] G. Evans, R. Greif, Thermally unstable convection with applications to chemical vapor deposition channel reactors, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 36 (1993) 2769–2781.

- [22] T.A. Nyce, J. Ouazzani, A. Durand-Daubin, F. Rosenberger, Mixed convection in a horizontal rectangular channel—experimental and numerical velocity distributions, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 35 (1992) 1481–1494.
- [23] K.J. Kennedy, A. Zebib, Combined free and forced convection between horizontal parallel planes: some cases studies, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 26 (1983) 471–474.
- [24] M.E. Braaten, S.V. Patankar, Analysis of laminar mixed convection in shrouded arrays of heated rectangular blocks, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 28 (1985) 1699–1709.
- [25] M. Hasnaoui, E. Bilgen, P. Vasseur, L. Robillard, Mixed convective heat transfer in a horizontal channel heated periodically from below, *Numer. Heat Transfer A* 20 (1991) 297–315.
- [26] E. Bilgen, X. Wang, P. Vasseur, F. Meng, L. Robillard, On the periodic conditions to simulate mixed convection heat transfer in horizontal channels, *Numer. Heat Transfer A* 27 (1995) 461–472.
- [27] A. Tangborn, A two-dimensional instability in a mixed convection flow with spatially periodic temperature boundary conditions, *Phys. Fluids A* 4 (1992) 1583–1586.
- [28] S.Q. Zhang, A.V. Tangborn, Flow regimes in two-dimensional mixed convection with spatially periodic lower wall heating, *Phys. Fluids* 6 (1994) 3285–3293.
- [29] A.V. Tangborn, S.Q. Zhang, V. Lakshminarayanan, A three-dimensional instability in mixed convection with streamwise periodic heating, *Phys. Fluids* 7 (1995) 2648–2658.
- [30] S.Q. Zhang, A.V. Tangborn, Two- and three-dimensional heat transfer in mixed convection with streamwise periodic heating, *Numer. Heat Transfer A* 28 (1995) 431–442.
- [31] M.T. Ouazzani, J.P. Caltagirone, G. Meyer, A. Mojtabi, Etude numérique et expérimentale de la convection mixte entre deux plans horizontaux à températures différentes, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 32 (1989) 261–269.
- [32] M.T. Ouazzani, J.K. Platten, A. Mojtabi, Etude expérimentale de la convection mixte entre deux plans horizontaux à températures différentes—2, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 33 (1990) 1417–1427.
- [33] H. Bénard, Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide, *Rev. Gén. Sci. Pur. Appl.* 11 (1900) 1261–1271, et 1309–1328.
- [34] L. Rayleigh, On convective currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side, *Philos. Mag.* 32 (1916) 529–546, se trouve aussi dans *Scientific Papers*, Cambridge University Press, 6 (1920) 432–446.
- [35] P. Idrac, Sur les courants de convection atmosphérique et leur rapport avec le vol à voile et la formation des bandes nuageuses, *CRAS* 171 (1920) 42–44.
- [36] P. Idrac, Etudes expérimentales sur le vol à voile, Thèse de doctorat, Paris, 1921.
- [37] A. Graham, Shear patterns in an unstable layer of air, *Philos. Trans. Roy. Soc. A* 232 (1933) 285–296.
- [38] K. Chandra, Instability of fluids heated from below, *Proc. Roy. Soc. A* 164 (1938) 231–242.
- [39] H. Bénard, D. Avsec, Travaux récents sur les tourbillons en bandes applications à l'astrophysique et à la météorologie, *J. Phys. Radium* 9 (1938) 468–500.
- [40] T. Terada and second year students of physics, Some experiments on periodic columnar formation of vortices caused by convection, Report of the Aeronautical Research Institute Univ. of Tokyo 3 (1928) 1–52.
- [41] T. Terada, M. Tamano, Further researches on periodic columnar vortices produced by convection, Report of the Aeronautical Research Institute Univ. of Tokyo 4 (1929) 447–470.
- [42] A.C. Philips, Sir G.T. Walker, The forms of stratified clouds, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* 58 (1932) 23–30.
- [43] D. Avsec, Sur la formation des tourbillons de convection, dans une couche gazeuse, sous des épaisseurs de quelques centimètres, *CRAS* 203 (1936) 532–534.
- [44] D. Avsec, Sur la vérification expérimentale du fait, prévu par la théorie de Lord Rayleigh, de l'existence du régime préconvection stable et sur le mécanisme de l'apparition des courants convectifs dans une couche gazeuse chauffée par en dessous, *CRAS* 203 (1936) 556–558.
- [45] D. Avsec, Sur le rapport λ/h des tourbillons en bandes longitudinales, *CRAS* 203 (1936) 1318–1320.
- [46] D. Avsec, Sur les formes ondulées des tourbillons en bandes longitudinales, *CRAS* 204 (1937) 167–169.
- [47] D. Avsec, Tourbillons en bandes transversales dans une couche d'air chauffée par en dessous, *CRAS* 206 (1938) 40–41.
- [48] D. Avsec, M. Luntz, Tourbillons thermoconvectifs et électroconvectifs, *La Météorologie* 31 (1937) 180–194.
- [49] H. Jeffreys, Some cases of instability in fluid motion, *Proc. Roy. Soc. A* 118 (1928) 195–208.
- [50] H.B. Squire, On the stability for three-dimensional disturbances of viscous fluid flow between parallel walls, *Proc. Roy. Soc. A* 142 (1933) 621–628.
- [51] J.K. Platten, J.C. Legros, *Convection in Liquids*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [52] J.M. Luijkx, Influence de la présence de parois latérales sur l'apparition de la convection libre, forcée et mixte, Thèse de doctorat, Université d'état de Mons, Belgique, 1983.
- [53] X. Nicolas, J.M. Luijkx, J.K. Platten, Linear stability of mixed convection flows in horizontal rectangular channels of finite transversal extension heated from below, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 43 (2000) 589–610.
- [54] Y. Kato, K. Fujimura, Prediction of pattern selection due to an interaction between longitudinal rolls and transverse modes in a flow through a rectangular channel heated from below, *Phys. Rev. E* 62 (2000) 601–611.
- [55] W. Velte, Zur Stabilität der Strömung in einem horizontalen Rohr bei ungleichmäßig erwärter Wand, *Z. Angew. Math. Phys.* 13 (1962) 591–600.
- [56] R. Sani, Note on flow instabilities in heated ducts, *Z. Angew. Math. Phys.* 15 (1964) 381–387.
- [57] Y. Mori, Y. Uchida, Forced convective heat transfer between horizontal flat plates, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 9 (1966) 803–817.
- [58] S. Ostrach, Y. Kamotani, Heat transfer augmentation in laminar fully developed channel flow by means of heating from below, *J. Heat Transfer* 97 (1975) 220–225.
- [59] W. Nakayama, G.J. Hwang, K.C. Cheng, Thermal instability in plane Poiseuille flow, *J. Heat Transfer Ser. C* 92 (1970) 61–68.
- [60] M. Akiyama, G.J. Hwang, K.C. Cheng, Experiments on the onset of longitudinal vortices in laminar forced convection between horizontal plates, *J. Heat Transfer Ser. C* 93 (1971) 335–341.
- [61] K.S. Gage, W.H. Reid, The stability of thermally stratified plane Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.* 33 (1968) 21–32.
- [62] J.K. Platten, A variational formulation for the stability of flows with temperature gradients, *Internat. J. Engng. Sci.* 9 (1971) 855–869.
- [63] M. Tveitereid, On the stability of thermally stratified plane Poiseuille flow, *Z. Angew. Math. Mech.* 54 (1974) 533–540.
- [64] J.K. Platten, M. Lefebvre, A preliminary experimental investigation of the stability of flows with an imposed temperature gradient, *Phys.* 51 (1971) 330–332.
- [65] R.J. Schmidt, S.W. Milverton, On the instability of a fluid when heated from below, *Proc. Roy. Soc. A* 152 (1935) 586–594.
- [66] J.M. Luijkx, J.K. Platten, J.C. Legros, On the existence of thermoconvective rolls, transverse to a superimposed mean Poiseuille flow, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 24 (1981) 803–817.
- [67] H.W. Müller, Thermische Konvektion in horizontaler Scherströmung, Thèse de doctorat, Université de Saarlandes à Sarrebruck, Allemagne, 1990.
- [68] H.W. Müller, M. Lücke, M. Kamps, Transversal convection patterns in horizontal shear flow, *Phys. Rev. A* 45 (1992) 3714–3725.
- [69] P. Carrière, P.A. Monkewitz, Convective versus absolute instability in mixed Rayleigh–Bénard–Poiseuille convection, *J. Fluid Mech.* 384 (1999) 243–262.
- [70] U.H. Kurtzweg, Convective instability of a hydrodynamic fluid within a rectangular cavity, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 8 (1965) 35–41.
- [71] J.M. Luijkx, J.K. Platten, On the onset of free convection in a rectangular channel, *J. Non-Equilibrium Thermodynam.* 6 (1981) 141–158.

- [72] U. Narusawa, Numerical analysis of mixed convection at the entrance region of a rectangular duct heated from below, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 36 (1993) 2375–2384.
- [73] C.H. Yu, M.Y. Chang, C.C. Huang, T.F. Lin, Unsteady vortex roll structures in a mixed convective air flow through a horizontal plane channel: A numerical study, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 40 (1997) 505–518.
- [74] M.Y. Chang, C.H. Yu, T.F. Lin, Changes of longitudinal vortex roll structure in a mixed convective air flow through a horizontal plane channel: An experimental study, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 40 (1997) 347–363.
- [75] M.Y. Chang, T.F. Lin, Experimental study of aspect ratio effects on longitudinal vortex flow in mixed convection of air in a horizontal rectangular duct, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 41 (1998) 719–733.
- [76] J. Shahda, U. Narusawa, On pattern selection in mixed convection in rectangular ducts, *Heat and Mass Transfer* 32 (1997) 213–222.
- [77] U. Narusawa, The second law analysis of mixed convection in rectangular ducts, *Heat Mass Transfer* 37 (2001) 197–203.
- [78] H.W. Müller, M. Lücke, M. Kamps, Convective patterns in horizontal flow, *Europhys. Lett.* 10 (1989) 451–456.
- [79] G.J. Hwang, K.C. Cheng, Convective instability in the thermal entrance region of a horizontal parallel plate channel heated from below, *J. Heat Transfer Ser. C* 95 (1973) 72–77.
- [80] K.C. Cheng, R.S. Wu, Axial heat conduction effects on thermal instability of horizontal plane Poiseuille flows heated from below, *J. Heat Transfer* 98 (1976) 564–569.
- [81] E. Nobile, L. Onesti, Numerical simulation of time-dependent mixed convection in horizontal rectangular channels, in: G.P. Celata, P. Di Marco, A. Mariani (Eds.), *Proceedings de la 2nd European Thermal Sciences et 14th UIT National Heat Transfer Conference*, Edizioni ETS, 1996, pp. 787–794.
- [82] T.C. Cheng, J.T. Lir, T.F. Lin, Stationary transverse rolls and *U*-rolls in limiting low Reynolds number mixed convective air flow near the convective threshold in a horizontal flat duct, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 45 (2002) 1211–1227.
- [83] J.T. Lir, M.Y. Chang, T.F. Lin, Vortex flow patterns near critical state for onset of convection in air flow through a bottom heated horizontal flat duct, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 44 (2001) 705–719.
- [84] Y. Kamotani, S. Ostrach, Effect of thermal instability on thermally developing laminar channel flow, *J. Heat Transfer* 98 (1976) 62–66.
- [85] Y. Kamotani, S. Ostrach, H. Miao, Convective heat transfer augmentation in thermal entrance regions by means of thermal instability, *J. Heat Transfer* 101 (1979) 222–226.
- [86] G.J. Hwang, C.L. Liu, An experimental study of convective instability in the thermal entrance region of a horizontal parallel plate channel heated from below, *Canad. J. Chem. Engrg.* 54 (1976) 521–525.
- [87] F.S. Lee, G.J. Hwang, Transient analysis on the onset of thermal instability in the thermal entrance region of a horizontal parallel plate channel, *J. Heat Transfer* 113 (1991) 363–370.
- [88] F.S. Lee, G.J. Hwang, The effect of asymmetric heating on the onset of thermal instability in the thermal entrance region of a parallel plate channel, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 34 (1991) 2207–2218.
- [89] P. Huerre, P.A. Monkewitz, Absolute and convective instabilities in free shear layers, *J. Fluid Mech.* 159 (1985) 151–168.
- [90] P. Huerre, P.A. Monkewitz, Local and global instabilities in spatially developing flows, *Ann. Rev. Fluid Mech.* 22 (1990) 473–537.
- [91] H.W. Müller, M. Lücke, M. Kamps, The effect of throughflow on Rayleigh-Bénard convective rolls, in: C.D. Andereck, F. Hayot (Eds.), *Ordered and Turbulent Patterns in Taylor-Couette Flow*, in: NATO ASI Ser. B, Vol. 297, 1992, pp. 187–196.
- [92] J.M. Chomaz, P. Huerre, L.G. Redekopp, Bifurcations to local and global modes in spatially developing flows, *Phys. Rev. Lett.* 60 (1988) 25–28.
- [93] R.J. Deissler, Spatially growing waves, intermittency and convective chaos in an open-flow system, *Phys. D* 25 (1987) 233–260.
- [94] R.J. Deissler, External noise and the origin and dynamics of structure in convectively unstable systems, *J. Statist. Phys.* 54 (1989) 1459–1488.
- [95] D. Astruc, Instabilité de Kelvin-Helmholtz en régime subsonique: Développement spatial et conditions aux limites ouvertes, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, France, 1993.
- [96] J.C. Buell, P. Huerre, Inflow/outflow boundary conditions and global dynamics of spatial mixing layers, Rapport CTR-S88 du Center for Turbulence Research, Proceedings of the Summer Program, Stanford University, 1988.
- [97] O. Thual, Generic instabilities and nonlinear dynamics, in: J.-P. Zahn, J. Zinn-Justin (Eds.), *Dynamique des Fluides Astrophysiques*, Cours des Houches, Session XLVII, Elsevier Science, Amsterdam, 1987.
- [98] P. Barthelet, Dynamique non-linéaire des ondes interfaciales entre deux fluides cisaillés, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1995.
- [99] A.C. Newell, T. Passot, J. Lega, Order parameter equations for patterns, *Ann. Rev. Fluid Mech.* 25 (1993) 399–453.
- [100] M.T. Ouazzani, J.K. Platten, A. Mojtabi, Intermittent patterns in mixed convection, *Appl. Sci. Res.* 51 (1993) 677–685.
- [101] X. Nicolas, A. Mojtabi, J.K. Platten, Two-dimensional numerical analysis of the Poiseuille-Bénard flow in a rectangular channel heated from below, *Phys. Fluids* 9 (1997) 337–348.
- [102] X. Nicolas, Simulation numérique et stabilité des écoulements de convection mixte en conduite rectangulaire chauffée par le bas, Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier Toulouse III, France, 1997.
- [103] H.R. Brand, R.J. Deissler, G. Ahlers, Simple model for the Bénard instability with horizontal flow near threshold, *Phys. Rev. A* 43 (1991) 4262–4268.
- [104] H.W. Müller, M. Tveitereid, S. Trainoff, Rayleigh-Bénard problem with imposed weak through-flow: Two coupled Ginzburg-Landau equations, *Phys. Rev. E* 48 (1993) 263–272.
- [105] M. Tveitereid, H.W. Müller, Pattern selection at the onset of Rayleigh-Bénard convection in a horizontal shear flow, *Phys. Rev. E* 50 (1994) 1219–1226.
- [106] H.S. Li, R.E. Kelly, P. Hall, Absolute instability of Rayleigh-Bénard convection in a time periodic shear-flow, *Phys. Fluids* 9 (1997) 1273–1276.
- [107] K. Fukui, M. Nakajima, H. Ueda, The longitudinal vortex and its effects on the transport processes in combined free and forced laminar convection between horizontal and inclined parallel plates, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 26 (1983) 109–120.
- [108] M. Lücke, A. Szepnyer, Noise sustained pattern growth: Bulk versus boundary effects, *Phys. Rev. E* 55 (1997) 5509–5521.
- [109] D. Jung, M. Lücke, A. Szepnyer, Influence of inlet and bulk noise on Rayleigh-Bénard convection with lateral flow, *Phys. Rev. E* 63 (056301) (2001) 1–20.
- [110] J.R. Maughan, F.P. Incropera, Experiments on mixed convection heat transfer for airflow in a horizontal and inclined channel, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 30 (1987) 1307–1318.
- [111] W.L. Lin, T.F. Lin, Experimental study of unstable mixed convection of air in a bottom heated horizontal rectangular duct, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 39 (1996) 1649–1663.
- [112] F.P. Incropera, A.L. Knox, J.R. Maughan, Mixed-convection flow and heat transfer in the entry region of a horizontal rectangular duct, *J. Heat Transfer* 109 (1987) 434–439.
- [113] H.V. Mahaney, F.P. Incropera, S. Ramadhyani, Development of laminar mixed convection flow in a horizontal rectangular duct with uniform bottom heating, *Numer. Heat Transfer* 12 (1987) 137–155.
- [114] H.V. Mahaney, F.P. Incropera, S. Ramadhyani, Effect of wall heating flux distribution on laminar mixed convection in the entrance region of a horizontal rectangular duct, *Numer. Heat Transfer* 13 (1988) 427–450.
- [115] J.R. Maughan, F.P. Incropera, Regions of heat transfer enhancement for laminar mixed convection in a parallel plate channel, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 33 (1990) 555–570.
- [116] C. Nonino, S. Del Giudice, Laminar mixed convection in the entrance region of horizontal rectangular ducts, *Internat. J. Numer. Methods Fluids* 13 (1991) 33–48.

- [117] K.C. Chiu, F. Rosenberger, Mixed convection between horizontal plates—1. Entrance effects, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 30 (1987) 1645–1654.
- [118] U. Narusawa, Mixed convection in a rectangular duct heated from below, *Internat. J. Fluid Mech. Res.* 25 (1998) 285–294.
- [119] W.L. Lin, T.F. Lin, Unstable aiding and opposing mixed convection of air in a bottom-heated rectangular duct slightly inclined from the horizontal, *J. Heat Transfer* 118 (1996) 47–55.
- [120] C. Gau, C.W. Liu, T.M. Huang, Win Aung, Secondary flow and enhancement of heat transfer in horizontal parallel-plate and convergent channels heating from below, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 42 (1999) 2629–2647.
- [121] W.S. Tseng, W.L. Lin, C.P. Yin, C.L. Lin, T.F. Lin, Stabilization of buoyancy-driven unstable vortex flow in mixed convection of air in a rectangular duct by tapering its top plate, *J. Heat Transfer* 122 (2000) 58–65.
- [122] C.C. Huang, T.F. Lin, Buoyancy induced flow transition in mixed convective flow of air through a bottom heated horizontal rectangular duct, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 37 (1994) 1235–1255.
- [123] C.C. Huang, T.F. Lin, Vortex flow and thermal characteristics in mixed convection of air in a horizontal rectangular duct: Effects of the Reynolds and Grashof numbers, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 38 (1995) 1661–1674.
- [124] C.C. Huang, T.F. Lin, Numerical simulation of transitional aiding mixed convective air flow in a bottom heated inclined rectangular duct, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 39 (1996) 1697–1710.
- [125] W.L. Lin, Y.T. Ker, T.F. Lin, Experimental observation and conjugated heat transfer analysis of vortex flow development in mixed convection of air in a horizontal rectangular duct, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 39 (1996) 3667–3683.
- [126] W.L. Lin, T.F. Lin, Observation and computation of vortex and/or reverse flow development in mixed convection of air in a slightly inclined rectangular duct, *J. Heat Transfer* 119 (1997) 691–699.
- [127] M.Y. Chang, C.H. Yu, T.F. Lin, Flow visualization and numerical simulation of transverse and mixed vortex roll formation in mixed convection of air in a horizontal flat duct, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 40 (1997) 1907–1922.
- [128] C.H. Yu, M.Y. Chang, T.F. Lin, Structures of moving transverse and mixed rolls in mixed convection of air in a horizontal plane channel, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 40 (1997) 333–346.
- [129] C.H. Yu, T.F. Lin, Effects of aspect ratio on vortex flow patterns in mixed convection of air through a bottom-heated horizontal rectangular duct, *Numer. Heat Transfer A* 31 (1997) 745–764.
- [130] G.J. Hwang, K.C. Cheng, A boundary vorticity method for finite amplitude convection in plane Poiseuille flow, in: Proceedings of the 12th Midwestern Mechanics Conference, in: Univ. of Notre Dame, Dev. Mech., Vol. 6, 1971, pp. 207–220.
- [131] S.S. Chen, A.S. Lavine, Laminar, buoyancy induced flow structures in a bottom heated, aspect ratio 2 duct with throughflow, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 39 (1996) 1–11.
- [132] A. Schlüter, D. Lortz, F. Busse, On the stability of steady finite amplitude convection, *J. Fluid Mech.* 23 (1) (1965) 129–144.
- [133] L. Fung, K. Nandakumar, J.H. Masliyah, Bifurcation phenomena and cellular-pattern evolution in mixed-convection heat transfer, *J. Fluid Mech.* 177 (1987) 339–357.
- [134] M.T. Ouazzani, Transferts thermiques et mécanique des écoulements de convection mixte, Thèse de doctorat, Université de Mons-Hainaut, Belgique, 1991.
- [135] M.T. Ouazzani, J.K. Platten, H.W. Müller, M. Lücke, Etude de la convection mixte entre deux plans horizontaux à des températures différentes—3, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 38 (1995) 875–886.
- [136] R.L. Sani, P.M. Gresho, Résumé and remarks on the open boundary condition minisymposium, *Internat. J. Numer. Methods Fluids* 18 (1994) 983–1008.
- [137] G. Evans, S. Paolucci, The thermoconvective instability of a plane Poiseuille flow heated from below: A proposed benchmark solution for open boundary flows, *Internat. J. Numer. Methods in Fluids* 11 (1990) 1001–1013.
- [138] A. Bottaro, Note on open boundary conditions for elliptic flows, *Numer. Heat Transfer B* 18 (1990) 243–256.
- [139] M.H. Kobayashi, J.C.F. Pereira, J.M.M. Sousa, Comparison of several open boundary numerical treatments for laminar recirculating flows, *Internat. J. Numer. Methods Fluids* 16 (1993) 403–419.
- [140] X. Nicolas, P. Traore, A. Mojtabi, J.P. Caltagirone, Augmented Lagrangian method and open boundary conditions in 2D simulation of Poiseuille–Bénard channel flow, *Internat. J. Numer. Methods Fluids* 25 (1997) 265–283.
- [141] G. Comini, M. Manzan, G. Cortella, Open boundary conditions for the streamfunction-vorticity formulation of unsteady laminar convection, *Numer. Heat Transfer B* 31 (1997) 217–234.
- [142] I. Orlanski, A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows, *J. Comput. Phys.* 21 (1976) 251–269.
- [143] D. Roth, P. Büchel, M. Lücke, H.W. Müller, M. Kamps, R. Schmitz, Influence of boundaries on pattern selection in through-flow, *Phys. D* 97 (1996) 253–263.
- [144] A. Pocheau, V. Croquette, P. Le Gal, C. Poitou, Convective pattern deformations under mean flow stress, *Europhys. Lett.* 3 (1987) 915–920.
- [145] E. Schröder, K. Bühler, Three-dimensional convection in rectangular domains with horizontal throughflow, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 38 (1995) 1249–1259.
- [146] M.Y. Chang, T.F. Lin, Vortex flow pattern selection and temporal-spatial structures of transverse and mixed vortex rolls in mixed convection of air in a horizontal flat duct, *Phys. Rev. E* 54 (1996) 5146–5160.
- [147] K.C. Chiu, J. Ouazzani, F. Rosenberger, Mixed convection between horizontal plates—2. Fully developed flow, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 30 (1987) 1655–1662.
- [148] K. Fujimura, R.E. Kelly, Mixed mode convection in an inclined slot, *J. Fluid Mech.* 246 (1993) 545–568.
- [149] K. Fujimura, R.E. Kelly, Interaction between longitudinal convection rolls and transverse waves in unstably stratified plane Poiseuille flow, *Phys. Fluids* 7 (1995) 68–79.
- [150] R.M. Clever, F.H. Busse, Instabilities of longitudinal rolls in the presence of Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.* 229 (1991) 517–529.
- [151] F.H. Busse, R.M. Clever, Instabilities of convection rolls in a fluid of moderate Prandtl number, *J. Fluid Mech.* 91 (2) (1979) 319–335.
- [152] K.C. Cheng, L. Shi, Visualization of convective instability phenomena in the entrance region of a horizontal rectangular channel heated from below and/or cooled from above, *Experimental Heat Transfer* 7 (1994) 235–248.
- [153] K. Fukui, M. Nakajima, H. Ueda, Coherent structure of turbulent longitudinal vortices in unstably-stratified turbulent flow, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 34 (1991) 2373–2385.
- [154] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Clarendon Press, Oxford, 1961.